

ماتریس سختی دقیق تیرهای منحنی با مقطع غیر یکنواخت

محمد محبوب جهرمی

استادیار گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

مهدی جعفری

کارشناس ارشد مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۷۸/۱۲/۲۴، تاریخ تصویب ۸۰/۲/۲۹)

چکیده

در این مقاله، ماتریس سختی دقیق تیرهای منحنی با مقطع غیر یکنواخت از روش مستقیم محاسبه شده است. المان در نظر گرفته شده دارای دو گره و دوازده درجه آزادی، تحت تاثیر سه نیرو و سه گشتاور در هر گره می‌باشد. هر مقطع از تیر تحت تاثیر بارهای خمشی، پیچشی، برشی و محوری تغییر شکل می‌دهد. عدم انطباق مرکز برش و مرکز سطح در مقطع تیر در نظر گرفته شده است. منحنی مرکز سطح می‌تواند هر گونه انحنای دلخواهی در فضا داشته باشد و در امتداد سطح مقطع تیر می‌تواند به دلخواه تغییر کند. با روش ارائه شده سختی سه نوع تیر مختلف بدست آمده، توزیع بار تحت بارگذاری اعمال شده رسم شده است. نشان داده شده است که این روش قابلیت تحلیل هرگونه تیری را داراست، ماتریس سختی بدست آمده دقیق است و در مواردی که حل تئوری وجود دارد نتایج با هم برابر هستند.

واژه های کلیدی : ماتریس سختی، تیر منحنی کلی، المان محدود

مقدمه

از آنجایی که تیرهای منحنی با سطح مقطع غیر یکنواخت در سازه‌های بسیاری مانند سازه وسایل نقلیه کاربرد فراوانی دارند، شناخت دقیق رفتار تغییر شکل آنها برای تحلیل و طراحی اینگونه سازه‌ها ضروری است. تا کنون مقالات بسیاری در این مورد نوشته شده است که هدفشان ارائه یک المان محدود مناسب بوده است، بطوری که بتواند برای طیف گسترده‌ای از خواص هندسی نتایج قابل قبولی بدهد. بیشتر المانهای ارائه شده را می‌توان به صورت کلی زیر دسته بندی کرد:

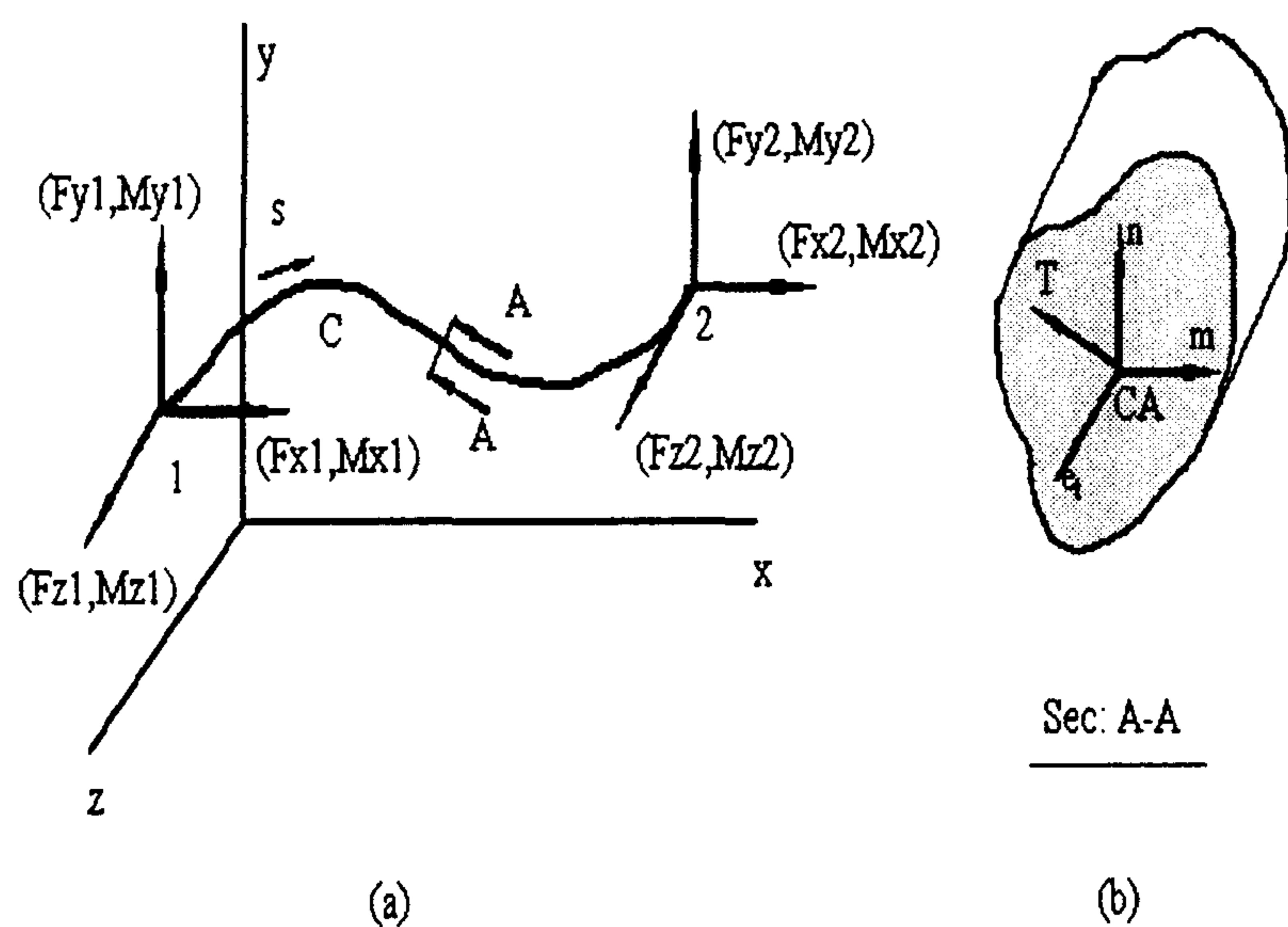
- المانهای بر پایه تابع کرنش [۱، ۲، ۳]
 - المانهای بر پایه انتگرال گیری کاهش یافته [۴]
 - المانهای ایزوپارامتریک بهبود یافته [۵، ۶، ۷]
- تعداد زیادی از المانهای ارائه شده منحصر به تیرهایی

هستند که منحنی تیر و جابجاییهایشان در صفحه انحنای قرار دارند و خمش خارج از صفحه و پیچش را در نظر نگرفته‌اند. تعدادی دیگر بر پایه توابع کرنش [۳] و بر پایه المانهای ایزوپارامتریک [۶، ۷] تغییر شکلهای خارج از صفحه را نیز در بر می‌گیرند. محدودیت دیگر این المانها اختصاص یافتن آنها به تیرهایی به شکل کمان دایره است و تیرهایی به شکل دیگر را پوشش نمی‌دهند. از طرف دیگر نتایج حاصل از آنها تقریبی است. Suresh و Krishnan [۸] در مقاله خود مرور کاملی بر کارهای پیشین انجام داده‌اند. اخیراً Litewka و Rakowski [۹] تابع شکل و ماتریس سختی دقیق یک تیر به شکل کمان دایره را، برای تغییر شکلهای در صفحه انحنای بدست آورده‌اند. در این مقاله ماتریس سختی دقیق یک تیر منحنی سه

مشخصات سطح مقطع تیر در امتداد آن قابل تغییر بوده و به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} A &= A(s) \\ I_{mm} &= I_{mm}(s) \\ I_{nn} &= I_{nn}(s) \\ J &= J(s) \\ \bar{r}_T &= \bar{r}_T(s) = r_m(s) \cdot \bar{m} + r_n(s) \cdot \bar{n} \end{aligned} \quad (۳)$$

که در آنها A ، I_{mm} ، I_{nn} و J به ترتیب مساحت سطح مقطع، گشتاور دوم سطح حول محور mm ، گشتاور دوم سطح حول محور nn و سختی پیچشی سطح هستند و \bar{r}_T بردار واصل مرکز سطح به مرکز برش می‌باشد.



شکل ۱: a. منحنی تیر فضایی b. مقطعی از تیر.

ماتریس سختی

شناخت خواص تغییر شکل یک تیر تنها با بدست آوردن ماتریس سختی آن امکان پذیر است. ماتریس سختی علاوه بر اهمیت آشکاری که در تحلیل استاتیکی سازه‌ها دارد مهمترین پارامتر در تحلیل دینامیکی نیز هست. در اینجا ماتریس سختی از روش مستقیم بدست می‌آید. در این روش ابتدا رابطه بار - جابجایی هر گره هنگامی که گره دیگر گیر دار شده است بدست آمده، سپس مقدار بارها در دو گره در حالیکه هر یک از درجات

بعدی با سطح مقطع غیر یکنواخت، با روش مستقیم بدست آورده شده است. در تغییر شکل تیر تغییر شکل‌های خمشی، پیچشی، برشی و کششی در نظر گرفته شده است. هیچ گونه محدودیتی برای شکل منحنی مرکز سطح و مشخصات مقطع تیر وجود ندارد. در محاسبات اثر عدم انطباق مرکز سطح بر مرکز برش نیز ملاحظه شده است. با ارائه مثالی در مورد یک فنر نتایج روش حاضر با نتایج تئوری مقایسه شده است، مشاهده می‌شود که هیچ خطایی در نتایج بدست آمده وجود ندارد. در پایان قابلیت‌های این روش با ارائه دو مثال دیگر بر روی فنرهایی با مقطع متغیر و فنرهایی با مراکز سطح و سوراخ نا منطبق نشان داده شده است.

تیرهای منحنی با مقطع غیر یکنواخت

برای تحلیل یک تیر با مقطع غیر یکنواخت پیش از هر چیز نحوه تعریف مشخصات آن از لحاظ ریاضی تعیین می‌گردد. شکل (۱) چنین تیری را نشان می‌دهد. منحنی C در شکل (1.a) از مراکز سطح تیر عبور می‌کند و نقاط ۱ و ۲ گره‌های دو انتهای تیر هستند. شکل، نیروها و گشتاورها وارد بر گره‌ها را نشان می‌دهد. مشخصات منحنی مرکز سطح تیر، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} x &= x(s) \\ y &= y(s) \\ z &= z(s) \end{aligned} \quad (۱)$$

که در s پارامتر امتداد مسیر C است. شکل (1.b) مقطعی از تیر در نقطه s را نشان می‌دهد. محورهای مختصات محلی به گونه‌ای تعریف می‌شوند که \bar{e}_T بردار واحد مماس بر مسیر و \bar{m} و \bar{n} بردارهای واحد منطبق بر محورهای اصلی سطح مقطع باشند. رابطه محورهای مختصات محلی با محورهای مختصات اصلی را می‌توان با معادله زیر نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \bar{e}_T \\ \bar{m} \\ \bar{n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{Bmatrix} \quad (۲)$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{TT}, \gamma_{Tm}, \gamma_{Tn}, \kappa_{TT}, \kappa_{Tm}, \kappa_{Tn}\} \quad (7)$$

$$\{p'\} = [E] \cdot \{\varepsilon\} \quad (8)$$

[E] ماتریس صلبیت^۱ المان ds است. تغییر شکل المان ds ، $\{dq'\}$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{dq'\} = \{du', dv', dw', d\varphi, d\theta_m, d\theta_n\} \quad (9)$$

$$\{dq'\} = \{\varepsilon\} \cdot ds \quad (10)$$

u' ، v' و w' به ترتیب جابجاییها در جهات \bar{e}_1 ، \bar{e}_2 و \bar{e}_3 و φ و θ_m و θ_n به ترتیب تغییر زاویه در جهات \bar{e}_4 ، \bar{e}_5 و \bar{e}_6 هستند.

ماتریس $\{p'\}$ را می‌توان از ماتریس $\{p\}$ با معادله زیر بدست آورد:

$$\{p'\} = [B] \cdot \{p\} \quad (11)$$

ماتریس [B] تابعی از s است و از معادلات منحنی تیر و مختصات محلی بدست می‌آید. اثر مرکز برش در این ماتریس در نظر گرفته می‌شود. در اثر جابجایی $\{dq'\}$ در المان ds جابجایی $\{dq\}$ در گره آزاد ایجاد می‌شود، که از معادله زیر بدست می‌آید:

$$\{dq\} = [B]^T \cdot \{dq'\} \quad (12)$$

که بالانویس T علامت ترانزپوز ماتریس است، با استفاده از معادله‌های (۸)، (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) می‌توان نوشت:

$$\{dq\} = [B]^T \cdot [E]^{-1} \cdot [B] \cdot ds \cdot \{p\} \quad (13)$$

با انتگرال گیری از معادله (۱۳) روی منحنی تیر، رابطه بین $\{p\}$ و $\{q\}$ که همان رابطه بار - جابجایی گره آزاد تیر است بدست می‌آید.

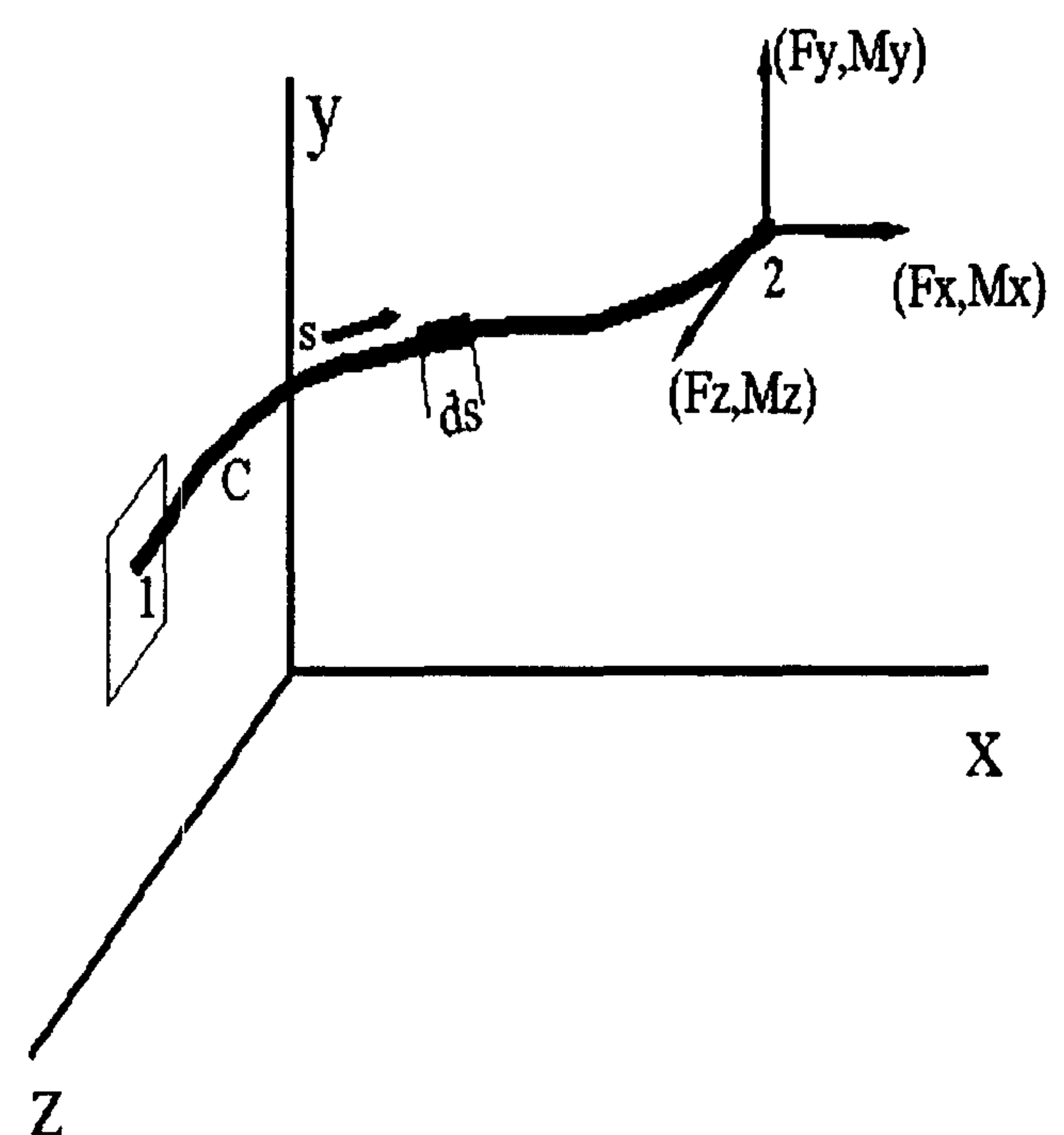
$$\{q\} = [D] \cdot \{p\} \quad (14)$$

که در آن

$$[D] = \int_C [B]^T \cdot [E]^{-1} \cdot [B] \cdot ds \quad (15)$$

آزادی تیر به تنهایی جابجایی برابر واحد می‌گیرند، بدست می‌آیند. این بارها در جابجایی اعمال شده، برابر مولفه متناظر خود در ماتریس سختی می‌باشند.

با فرض برقرار بودن شرایط اصل بر هم نهی، که در تیرهایی با جابجاییهای کوچک نسبت به ابعاد تیر این شرایط برقرار است، جابجایی گره آزاد از مجموع اثرات تغییر شکل‌های ناشی از بارگذاری المانهای المان طول تیر، بر گره آزاد بدست می‌آید. شکل (۲) یک تیر منحنی یک سر گیردار، بارگذاری شده در سر دیگر را نشان می‌دهد.



شکل ۲: تیر منحنی یک سر گیر دار.

بارهای وارد بر گره آزاد و جابجاییهای آن در دو ماتریس ستونی $\{p\}$ و $\{q\}$ مرتب می‌شوند.

$$\{p\} = \{f_x, f_y, f_z, M_x, M_y, M_z\} \quad (4)$$

$$\{q\} = \{u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z\} \quad (5)$$

در اثر بارگذاری $\{p\}$ بر گره آزاد، بار $\{p'\}$ المان ds روی منحنی C وارد می‌شود و در اثر این بارگذاری المان ds دچار تغییر شکل در واحد طول $\{\varepsilon\}$ می‌شود. در ادامه $\{p'\}$ و $\{\varepsilon\}$ و رابطه بین آنها آمده است.

$$\{p'\} = \{f_T, f_m, f_n, M_T, M_m, M_n\} \quad (6)$$

مثالهای عددی

روش حاضر برای فنر ماریچ در سه حالت مختلف بکار برده شده است. شکل (۳) یک فنر ماریچ را نشان می‌دهد که تحت بار p در امتداد محور x ها قرار دارد و در اثر آن تغییر شکل می‌دهد. فنر در حالت کلی دارای منحنی مرکز سطح فضایی است و از آنجاییکه هم در مقالات پیشین سختی آن بدست آمده است و هم در حالت زاویه گام صفر درجه حل تئوری برای آن وجود دارد، مثال مناسبی برای این منظور است. در حالت اول یک فنر با مقطع یکنواخت در زاویه گامهای مختلف بررسی و نتایج بدست آمده با نتایج پیشین و تئوری مقایسه شده است. در حالت دوم همان فنر اینبار با مقطع متغیر بررسی و نتایج آن آورده شده است و در نهایت اثر عدم انطباق مرکز سوراخ بر مرکز برش در سختی فنر بدست آمده است.

فنر با سطح مقطع یکنواخت

از آنجاییکه در حالت زاویه گام صفر، مقدار جابجایی انتهای فنر از روش تئوری قابل محاسبه است، می‌توان از آن برای مقایسه با روش حاضر استفاده کرد. مشخصات فنر نشان داده شده در شکل، در زیر آورده شده است:

$$d = 1$$

$$R = 10$$

$$p = 100$$

$$E = 10^7$$

$$\nu = 0.3$$

$$\beta^2 = 0.886$$

$$\theta = 2 \cdot \pi \cdot q$$

$$0 \leq q \leq 1$$

(۲۵)

رابطه بار - جابجایی فنر با زاویه گام صفر را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\Delta x = \pi \cdot p \cdot R \left(\frac{R^2}{EI} + \frac{3 \cdot R^2}{GJ} + \frac{2}{\beta^2 GA} \right)$$

(۲۶)

رابطه (۱۴) را برای دو گره ۱ و ۲ می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\{q_1\} = [D_1] \cdot \{p_1\}$$

(۱۶)

$$\{q_2\} = [D_2] \cdot \{p_2\}$$

(۱۷)

معادله زیر روابط بین بار، جابجایی و ماتریس سختی در یک تیر با دوازده درجه آزادی را تعیین می‌کند:

$$\{p\}_{12 \times 1} = [k]_{12 \times 12} \cdot \{q\}_{12 \times 1}$$

(۱۸)

این معادله را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

(۱۹)

از آنجاییکه هر ستون ماتریس سختی نیروها و گشتاورهای وارد بر دو گره را به طوریکه در یکی از درجات آزادی تیر جابجایی واحد ایجاد شود، در بر دارد، از معادلات (۱۶) و (۱۷) مولفه‌های ماتریس سختی به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$[k_{11}] = [D_1]^{-1}$$

(۲۰)

$$[k_{22}] = [D_2]^{-1}$$

(۲۱)

برای برقراری شرط تعادل تیر، باید همواره بین بارهای وارد بر آن رابطه تعادلی به شکل زیر برقرار باشد:

$$\{p_2\} = [L] \cdot \{p_1\}$$

(۲۲)

$[L]$ به موقعیت گره‌های ۱ و ۲ بستگی دارد. با استفاده از این معادله می‌توان مولفه‌های باقی مانده ماتریس سختی را بدست آورد.

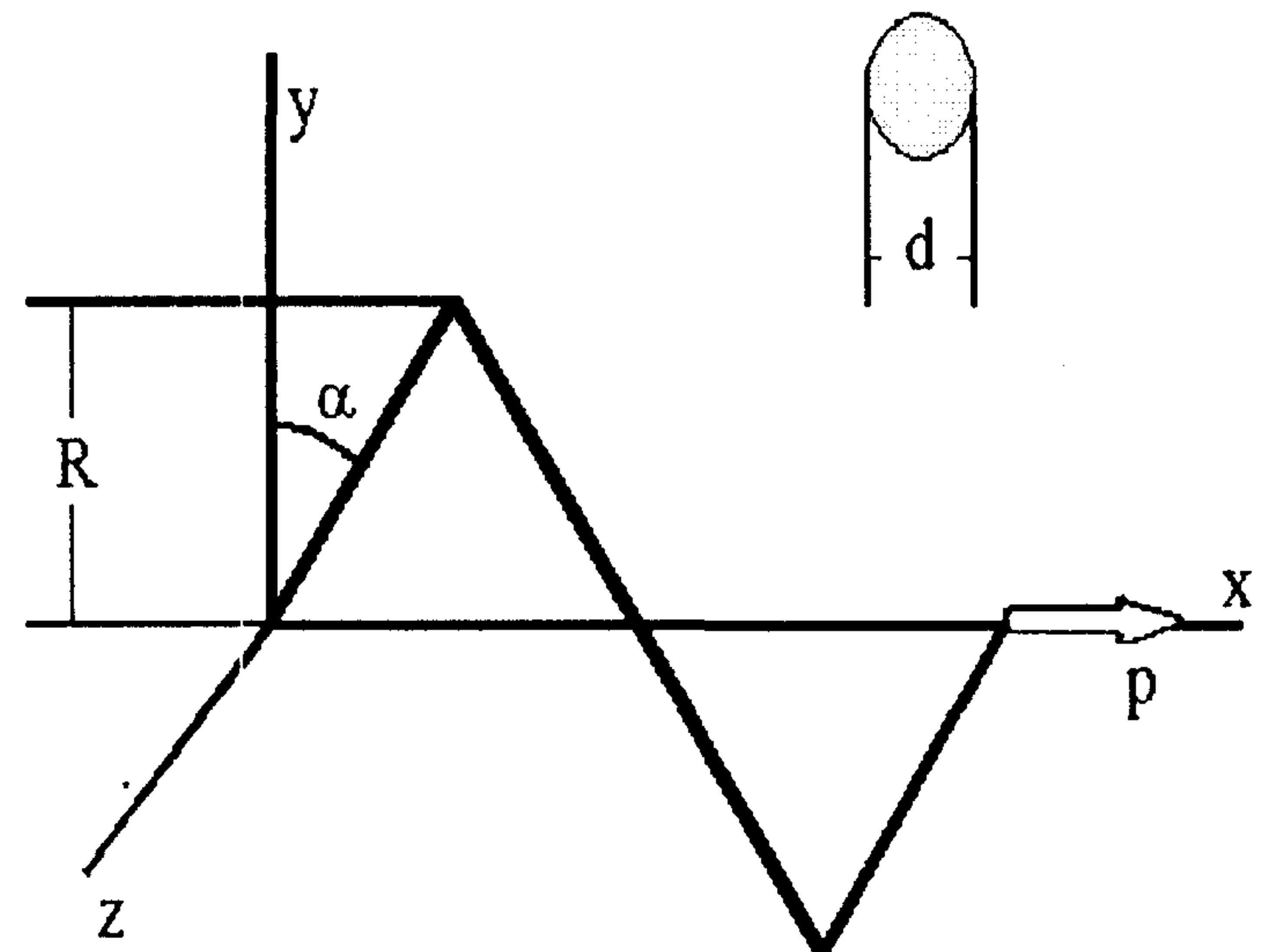
$$[k_{21}] = [L] \cdot [k_{11}]$$

(۲۳)

$$[k_{12}] = [L] \cdot [k_{22}]$$

(۲۴)

جمله اول درون کروشه مربوط به تغییر شکل خمشی، جمله دوم مربوط به تغییر شکل پیچشی و جمله سوم مربوط به تغییر شکل برشی است. از روش حاضر، در پنج زاویه گام مختلف فنر، مقدار جابجایی انتهایی آن تحت بار p بدست آمده است. در مرجع [۳] این مقادیر با دو روش 2GCSCC و 3GLSLC برای یک تیر با زاویه گام 10° درجه بدست آمده است. در جدول (۱) مقادیر بدست آمده از روش حاضر با مقادیر تئوری و نتایج مرجع [۳] مقایسه شده است.



شکل ۳: فنر مارپیچ.

جدول ۱: جابجایی انتهایی فنر ساده.

| زاویه گام (درجه) | 0 | 10 | 20 | 30 | 45 |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| روش حاضر (۱ المان) | 3.138 | 3.169 | 3.268 | 3.457 | 4.030 |
| $GCSCC$ (۴ المان) | - | 2.87 | - | - | - |
| $GCSCC$ (۸ المان) | - | 3.10 | - | - | - |
| $GLSLC$ (۴ المان) | - | 3.07 | - | - | - |
| $GLSLC$ (۸ المان) | - | 3.12 | - | - | - |
| تئوری | 3.318 | - | - | - | - |

جدول ۲: جابجایی فنر با مقطع متغیر در زاویه گام 10° و شدت تغییر مقطعهای متفاوت.

| شدت تغییرات شعاع مقطع (k) | 0 | 0.01 | 0.02 | 0.05 | 0.1 | 0.2 | 0.5 |
|-------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| جابجایی | 3.169 | 3.169 | 3.170 | 3.178 | 3.207 | 3.328 | 4.468 |

شده است. مشاهده می‌گردد با افزایش شدت تغییرات مقطع سختی فنر کاهش می‌یابد.

فنر با مرکز برش و مرکز سطح غیر منطبق

در این بخش همان فنر قسمت قبل با زاویه گام 10° درجه در نظر گرفته شده و فرض می‌گردد مرکز سطح با مرکز برش غیر منطبق باشند. اینکار در اینجا با گرفتن شعاع مارپیچ بزرگتر برای منحنی مرکز برش صورت می‌گیرد.

$$R_T = R + r_n$$

(۲۸)

فنر با مقطع متغیر

در این قسمت فنر نشان داده شده در شکل (۳) با مقطع متغیر حل می‌شود. فرض می‌شود شعاع مقطع با رابطه زیر تغییر می‌کند.

$$r = 0.5 + k \cdot (0.5 - q)$$

$$0 \leq q \leq 1$$

(۲۷)

در معادله (۲۷) پارامتری است که شدت تغییرات را کنترل می‌کند. در جدول (۲) جابجایی فنر در جهت x در مقادیر مختلف k برای یک فنر با زاویه گام 10° درجه آورده

از روش مستقیم محاسبه شده است. نتایج حاصل از این روش در مورد یک فنر ساده با نتایج تئوری و نتایج روشهای پیشین مقایسه و نشان داده شد که نتایج بدست آمده دقیق هستند. دو مثال دیگر برای همان فنر و اینبار با در نظر گرفتن اثر تغییر مقطع و عدم انطباق روی سختی تیرها ارائه گردید. با مثالهای ارائه شده نشان داده شد که روش حاضر توانایی تحلیل هر گونه تیری را دارا است.

که R شعاع منحنی مرکز سطح، R_T شعاع منحنی مرکز برش و r_n مقدار عدم انطباق است. نتایج حاصل برای این تیر در مقادیر مختلف عدم انطباق در جدول (۳) آورده شده است.

نتیجه گیری

در این مقاله ماتریس سختی دقیق یک تیر منحنی با مقطع غیر یکنواخت و مرکز سطح و مرکز برش غیر منطبق

جدول ۳: جابجایی فنر با مرکز سطح و مرکز برش غیر منطبق.

| 0 | 0.01 | 0.02 | 0.05 | 0.1 | 0.2 | 0.5 | r_n |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|
| 3.169 | 3.172 | 3.176 | 3.186 | 3.202 | 3.235 | 3.337 | جابجایی |

مراجع

- 1 – Ashwell, D. G. and Sabir A. B. (1971). "Limitation of certain curved finite elements when applied to arches." *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 13, PP. 133-9 .
- 2 – Dawe, D. J. (1974). "Curved finite elements for the analysis of shallow and deep arches." *Computers and Structures*, Vol. 4, PP. 559-80 .
- 3 - Choi Jong-keun , Lim Jong-keun, (1995). "General curved beam elements based on the assumed strain fields." *Computers and Structures*, Vol. 55, PP. 379-386 .
- 4 – Stolarski, .H. and Belytschko, T. (1982). "Membrane locking and reduced integration for curved elements." *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 49, PP. 172-176 .
- 5 – Prathap, G. and Ramesh Babu, G. (1986). "An isoparametric quadratic thick curved beam element." *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, PP. 1583-600 .
- 6 – Naganarajana, B. P. and Prathap, G. (1990). "Consistency aspects of out-of-plane bending, torsion and shear in a quadratic curved beam element." *Internatinal Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 30, PP. 431- 443 .
- 7 – Prathap, G. and Naganarajana, B. P. (1990). "Analysis of locking and stress oscillation in a general curved beam element." *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 30, PP.177-200 .
- 8 – Krishnan, A. and Suresh, Y. J. (1988). "A simple cubic linear element for static and free vibration analyses of curved beams." *Computers and Structures*, Vol. 68, PP. 473-489 .
- 9 – Litewka, P. and Rakowski, J. (1998). "The exact thick arch finite element." *Computers and Structures*, Vol. 68, PP.369-379 .

واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1 – Rigidity Matrix
- 2 – General Curved Beam Element with Constant Strains and Constant Curvatures
- 3 - General Curved Beam Element with Linear Strains and Linear Curvatures