

ارتعاشات غیرخطی صفحات حلقوی با ضخامت متغیر پله‌ای با خواص اورتوتروپیک

محمدحسن نائی

استادیار گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

قادر قربانی اصل

مربی گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۷۸/۱۱/۶، تاریخ تصویب ۷۹/۲/۲۴)

چکیده

در این مقاله ارتعاشات غیرخطی صفحات حلقوی با ضخامت متغیر پله‌ای با خواص اورتوتروپیک مورد بررسی قرار گرفته است. پس از بدست آمدن معادلات حاکم بر صفحه، فرض وجود مودهای هارمونیک و استفاده از روش ریتز-کانتورویچ، موجب حذف متغیر زمان در روابط تعادل شده و معادلات دیفرانسیل نسبی حاکم بر صفحه به یک جفت معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی (معادلات فون کارمن) که به صورت مسئله مقدار ویژه می‌باشد، تبدیل گردیده است. آنگاه با بکارگیری روش تفاضل محدود و استفاده از المانهای غیرمساوی در مرزهای سیستم، این معادلات بوسیله روش نیوتن رافسون و حل دستگاه معادلات خطی حل شده است. در پایان، پارامترهای توابع شکل، فرکانس غیرخطی و تنش‌های خمشی و غشایی برای صفحات با دو موقعیت تکیه گاهی گیردار و ساده بدست آمده و نتایج آنها با یکدیگر مقایسه شده است.

واژه‌های کلیدی: صفحات دایروی اورتوتروپیک، ضخامت غیر یکنواخت، آنالیز غیر خطی، روش تفاضل محدود

مقدمه

هرگاه تغییرات نیروهای خارجی اعمال شده بر صفحه، نسبت به زمان کم باشد، می‌توان از اثر اینرسی حرکتی صرف‌نظر نمود و رفتار سازه را بوسیله معادلات استاتیکی با تقریب خوبی بیان کرد. اما در سازه‌هایی نظیر موشکها، سفینه‌های مدرن و یا اسکلتها که با تغییرات شدید نوسانات خارجی مواجه می‌باشند لازم است اینرسی حرکتی در نظر گرفته شده و رفتار دینامیکی سیستم برحسب تابعی از زمان دنبال شود.

امروزه در بحث ارتعاشات صفحات نازک، اغلب شرایطی مورد بررسی قرار می‌گیرد که لازم است صفحه در مقابل ارتعاشات با دامنه زیاد مقاوم باشد. اگر در این حالت، دامنه حرکت صفحه تقریباً برابر ضخامت صفحه یا بزرگتر از آن گردد، بحث ریاضی مربوط به معادلات حرکت سیستم، علاوه بر تئوری کلاسیک خطی، می‌بایست تغییر شکل صفحه میان‌تار را نیز شامل شود. این تغییر شکل علاوه بر وجود اثرات خمشی، با فرض وجود اثرات غشایی بر روی مقاومت صفحه قابل توجه است. بدین ترتیب پدیده غیرخطی بودن هندسی در معادلات حاکم بر صفحه ظاهر می‌شود. به علت پیچیدگی طبیعت معادلات حاکم بر نوسانات با دامنه زیاد، تنها از روشهای تقریبی می‌توان برای حل این مسایل استفاده کرد.

سیر بررسی ارتعاشات غیرخطی صفحات از سال ۱۹۵۵ توسط Grigoliuk [۱] با بکارگیری مجموعه‌ای از معادلات کلی

فون کارمن [۲] Von Karman و استفاده از روش گالرکین آغاز گردید، تا اینکه در سال ۱۹۷۰ حل این معادلات توسط Sandman [۳] به روش‌های جدیدی منتهی شد. او معادلات را با روشی که به فرض مودهای هارمونیک شهرت یافت، حل نمود. امروزه، در طراحی‌های مدرن اغلب از سازه‌های صفحه‌ای غیریکنواخت، بجای تحمل دامنه‌های ارتعاشی زیاد استفاده می‌شود علاوه بر آن، صفحات نازک تشکیل شده از مواد مرکب و پلاستیک‌های مسلح^۱ بطور روزافزون در تجهیزات فضایی، زیردریایی‌ها و مخازن تحت فشار بکار گرفته می‌شوند. عمدتاً این گروه از مسایل کمتر مورد توجه ریاضی قرار گرفته‌اند. در سال ۱۹۷۲، Chi-Lung Huang, Y.J. Meng [۴] ارتعاشات غیرخطی صفحات دایروی غیریکنواخت را با استفاده از روش ریتز-کانتورویچ و مسئله مقدار اولیه حل نمودند. در سال ۱۹۷۳، Chi-Lung Huang [۵] در راستای کار قبلی، ارتعاشات یک صفحه اورتوتروپیک با یک هسته آیزوتروپیک را با همان روش حل کرد. انواع دیگر این مسأله توسط افراد دیگر نیز مورد مطالعه قرار گرفته است [۶].

در این مقاله، تحلیل ارتعاشی معادلات فون کارمن به صورت یک مسئله مقدار مرزی و به روش تفاضل‌های محدود برای یک صفحه اورتوتروپیک با یک هسته آیزوتروپیک با ضخامت متغیر پله‌ای حل گردیده و پارامترهای ارتعاشی آنها با یکدیگر مقایسه

شده است.

$$\begin{cases} \varepsilon_r = C_r \sigma_r + C' \cdot \sigma_\theta \\ \varepsilon_\theta = C_\theta \sigma_\theta + C' \cdot \sigma_r \end{cases} \quad (2-2)$$

که در آن E_r ، E_θ و E' ثابت الاستیسیته و C_r ، C_θ و C' ثابت نرمی در جهات r ، θ و r_θ می‌باشند. با توجه به روابط بالا صفحه در وضعیت غیرخطی هندسی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. با نوشتن رابطه تعادل نیرو در راستای r و با حذف اینرسی طولی نتیجه می‌شود،

$$\frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{N_r - N_\theta}{r} = 0 \quad (3)$$

$$N_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r dz \quad (1-4)$$

$$N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta dz \quad (2-4)$$

از سوی دیگر بین مؤلفه های کرنش (از روابط ۱) رابطه سازگاری زیر برقرار است:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta + r \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \quad (5)$$

با جایگذاری معادله (۱) در معادله (۵) و اعمال $\sigma_r = N_r/h$ و $\sigma_\theta = N_\theta/h$ نیز استفاده از روابط (۴) و (۲-۱) نتیجه می‌شود:

$$\frac{-h}{2r C_\theta} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 = \frac{\partial}{\partial r} (N_r + N_\theta) + \frac{N_r}{r} \left(1 - \frac{C_r}{C_\theta} \right) \quad (6)$$

حال تابع تنش $\psi(r,t)$ به نحوی تعیین می‌شود که رابطه (۳) را ارضاء نماید. این تابع عبارت است از

$$N_r = \frac{\psi}{r}, \quad N_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (7)$$

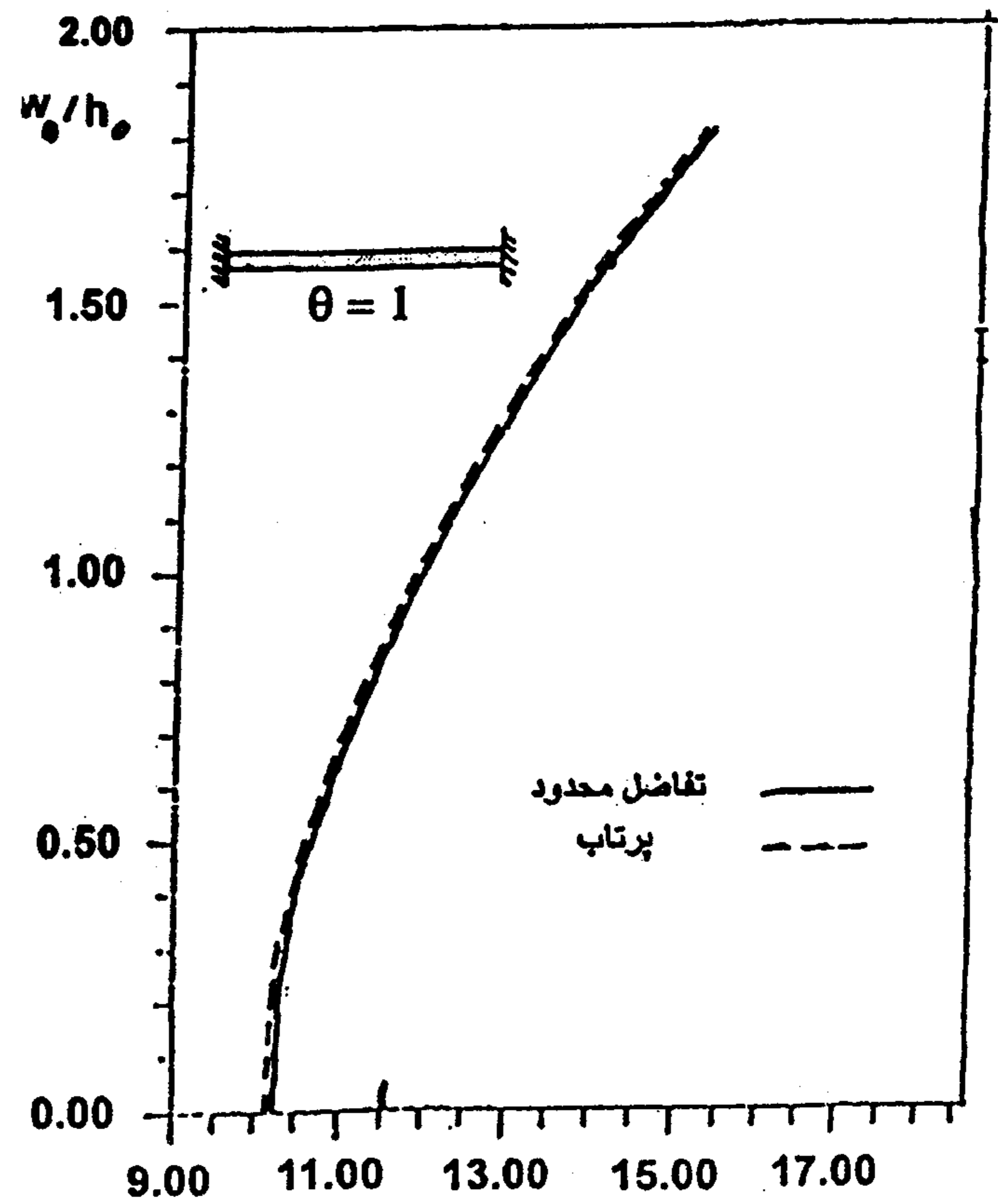
با اعمال رابطه (۷) در رابطه (۶) نتیجه می‌شود،

$$-\frac{h}{2r C_\theta} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} \frac{C_r}{C_\theta} \quad (8)$$

با نوشتن رابطه تعادل ممان خواهیم داشت:

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{M_r - M_\theta}{r} = V_r \quad (9)$$

که در آن V_r نیروی برشی و M_r و M_θ به ترتیب گشتاور



شکل ۱: پاسخ فرکانسی غیرخطی در حالت ارتعاشات آزاد

معادلات حاکم بر حرکت

یک صفحه حلقوی نازک که در حالت اولیه بدون تغییر شکل می‌باشد، در سیستم مختصات استوانه‌ای r ، θ و z مطابق شکل (۱) در نظر گرفته می‌شود. این صفحه از یک محیط الاستیک، همگن و متقارن (از نظر هندسی) تشکیل شده و از نظر خواص الاستیکی دارای تقارن اورتوتروپیک است.

با فرض عمود ماندن صفحات عمود بر صفحه میان‌تار در قبل و بعد از خمش، زیاد بودن شیب ناشی از تغییر شکل، کوچک بودن تنش نرمال در مقایسه با سایر مؤلفه های تنش و متقارن بودن بار و خیز نسبت به راستای z می‌توان مؤلفه های کرنش را به صورت زیر

بیان کرد:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \\ \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} - \frac{z}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \end{cases} \quad (1-1) \quad (2-1)$$

که در آن $u(r,t)$ و $w(r,t)$ به ترتیب عبارت از مؤلفه های شعاعی و عرضی صفحه میان‌تار می‌باشند. طبق قانون هوک و بر اساس تقارن اورتوتروپیک، روابط تنش، کرنش به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \sigma_r = E_r \varepsilon_r + E' \cdot \varepsilon_\theta \\ \sigma_\theta = E_\theta \varepsilon_\theta + E' \cdot \varepsilon_r \end{cases} \quad (1-2)$$

$$-\frac{1}{\theta^3} \frac{12}{C.E_r} \left(\frac{q}{h}\right)^2 \frac{1}{1-\nu^2} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\phi \frac{\partial x}{\partial \xi}\right) = \frac{p(\varepsilon, \tau)}{\theta^3} \quad (14)$$

در مسایل حل شده در این مقاله از شرایط مرزی زیر استفاده شده است،

۱- تکیه گاه گیردار غیرقابل حرکت:

$$\left\{ \frac{\partial x}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{C_r}{C_\theta} \frac{\phi}{\xi} = 0, x=0 \right\} \quad (1-15)$$

۲- تکیه گاه ساده غیرقابل حرکت:

$$\left\{ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{E_r}{E_\theta} \frac{1}{\xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{C_r}{C_\theta} \frac{\phi}{\xi} = 0, \xi=0 \right\} \quad (2-15)$$

۳- شرایط در مرکز صفحه،

$$\left\{ \frac{\partial x}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial^3 x}{\partial \xi^3} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - \frac{E_\theta}{E_r} \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} = 0, \phi=0, \xi=1 \right\} \quad (3-15)$$

تحلیل تقریبی

حل تحلیلی و دقیق معادلات (۱۳) و (۱۴) بسیار مشکل و عملاً غیرقابل انجام است. به همین دلیل تحلیل مسئله از طریق روشهای تقریبی دنبال می شود. در این مقاله با فرض وجود مودهای هارمونیک، معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی به معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی تبدیل شده که به شکل یک مسئله مقدار ویژه غیرخطی می باشد. آنگاه با بکارگیری روش فوادمسل محدود و نیوتن رافسون، سیستم معادلات مزبور به سیستم معادلات غیرخطی تبدیل و حل شده است.

روش میانگین ریتز-کانتورویچ با فرض وجود مودهای هارمونیک، توابع $p(\varepsilon, \tau)$ و $x(\xi, \tau)$ و $\phi(\xi, \tau)$ را به صورت زیر بیان می دارد:

$$\begin{cases} P(\xi, \tau) = Q(\xi) \cdot \sin(\omega \tau) \\ x(\xi, \tau) = A \cdot g(\xi) \cdot \sin(\omega \tau) \\ \phi(\xi, \tau) = A^2 \cdot f(\xi) \cdot \sin(\omega \tau) \end{cases} \quad (16)$$

در این روابط، A پارامتر بدون بعد، ω فرکانس زاویه ای بدون بعد، $f(\xi)$ ، $g(\xi)$ و $Q(\xi)$ به ترتیب توابع شکل متناظر با ϕ ، x و p می باشند. با جایگزینی معادلات (۱۶) در معادله (۱۳)، شکل نهایی این معادله چنین خواهد شد:

خمشی و شعاعی بر واحد طول می باشند. از سوی دیگر با بکارگیری روابط (۱) در روابط (۱-۲)، σ_r و σ_θ در روابط زیر جایگزین می گردند:

$$M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r \cdot z \cdot dz = -\frac{h^3}{12} \left(E_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{E_r}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = (D_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + D_r' \frac{\partial w}{r \partial r}) \quad (1-10)$$

$$M_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta \cdot z \cdot dz = -\left(D_\theta \frac{\partial w}{r \partial r} + D_\theta' \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \quad (2-10)$$

با نوشتن رابطه تعادل نیرو در جهت z رابطه زیر حاصل

می شود:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot V_r) = \rho h_r \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - r q(r, t) - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot N_r \frac{\partial w}{\partial r}) \quad (11)$$

در این رابطه، ρ چگالی جرمی صفحه و $q(r, t)$ شدت بار عرضی بر حسب نیرو بر واحد سطح می باشد. با جایگزینی V_r از رابطه (۹)، M_r و M_θ از روابط (۱۰) و N_r از رابطه (۷) در رابطه بالا نتیجه می شود:

$$D_r \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2D_r}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{D_\theta}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{D_\theta}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\psi \frac{\partial w}{\partial r} \right) = q(r, t) \quad (12)$$

روابط (۸) و (۱۲)، معادلات تعادل دینامیکی صفحه و یا معادلات فون کارمن در حالت تقارن اورتوتروپیک می باشند. با استفاده از کمیت های بی بعد زیر:

$$x = \frac{w}{a}, \quad \xi = \frac{r}{a}, \quad \phi = \frac{C_\theta(1-\nu^2)}{h \cdot a} \psi,$$

$$\tau = \left[\frac{E_\theta}{12\rho h \cdot z} \right]^{1/2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 t$$

معادلات (۸) و (۱۲) به معادلات زیر تبدیل می شوند:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \frac{C_r}{C_\theta} \frac{\phi}{\xi^2} = -\frac{1-\nu^2}{2\xi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)^2 \\ \frac{\partial^4 X}{\partial \xi^4} + \frac{2}{\xi} \frac{\partial^3 X}{\partial \xi^3} - \frac{E_\theta}{E_r} \frac{1}{\xi^3} \frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{1}{\theta^2} \frac{E_\theta}{E_r} \frac{\partial^2 X}{\partial \tau^2} \end{cases} \quad (13)$$

مشتق موجود در این روابط با بسط هایی که براساس مقدار تابع در یک نقطه و نقاط اطراف آن استوار است، برای تعداد نقاط مشخصی از جسم به یک سیستم معادلات جبری تبدیل شده و نهایتاً در یک دستگاه معادلات غیرخطی حل می‌گردد. در این مقاله از بسط های روش مرکزی در حالت یک بعدی و با خطای مرتبه دوم فاصله استفاده شده است. جهت رسیدن به جوابهای صحیح با نقاط انتخابی کمتر و در نتیجه همگرایی سریعتر در مرزها از بسط تعمیم یافته اختلاف محدود استفاده شده است. [۷]

در مسأله ارتعاشی دومی مورد بررسی با توجه به وجود مقدار ویژه، تعداد مجهولات در معادلات (۱۷) و (۱۸) (λ, f_i, g_i) بیش از تعداد معادلات می‌باشند. برای رفع این مشکل از تکنیک نرمالیزاسیون معادلات استفاده شده است. در اینجا نرمالیزاسیون $g=1$ در $\xi=\xi_1$ بکار برده شده است. بنابراین تعداد معادلات با تعداد مجهولات برابر گردیده و سیستم معادلات غیرخطی که از بسط تفاضل محدود معادلات (۱۷) و (۱۸) حاصل شده‌اند با روش چندبعدی^۱ نیوتن رافسون [۸] قابل حل خواهند بود. در این روش به دلیل وجود برخی از عناصر بردار مجهولات در ماتریس ضرایب سیستم معادلات، لازم است مسئله با حدس اولیه مناسبی شروع شود. این حدس از حل بخش خطی معادله (۱۸) $(\alpha=0)$ ، در حالت ارتعاشات آزاد $(\phi^*=0)$ بدست می‌آید. جوابهای بدست آمده در سیستم معادلات (۱۷)، (۱۸) و (۱۹) با تغییر کوچکی در پارامتر α اعمال گردیده و تا یک α معین ادامه می‌یابد. حدس اولیه مورد استفاده در هر مرحله از مرحله قبل گرفته می‌شود. سپس ارتعاشات اجباری سیستم با اعمال تدریجی بار ϕ^* تا رسیدن به یک مقدار مشخص ادامه می‌یابد. در این مسائل گام افزایش α برابر ۰/۱ و حداکثر برابر ۴ بوده است و مسائل حداکثر با ۳ بار تکرار به جواب صحیح با دقت 1×10^{-4} همگرایی گردید. در شکل (۱) مسأله در حالت $\theta=1$ و $C=1$ (صفحه ایزوتروپیک با ضخامت ثابت) که به روش پرتاب حل شده، مقایسه شده است.

حل مسایل نمونه و نتایج

حال به مرور شکل های نمونه‌ای در خصوص کاربرد و نتایج بحث های بیان شده برای صفحات با شرایط تکیه گاهی ساده و گیردار می‌پردازیم.

شکل های (۲) تغییرات تابع شکل g را در طول صفحه (از مرکز تا انتها) برای دو صفحه با شرایط گیردار غیرقابل حرکت با مشخصه‌های هندسی $\theta=0.5$ و $\theta=2$ و با C های مختلف در مود اول نشان می‌دهد. مقایسه بین این دو شکل تفاوت بین توابع شکل

$$\frac{d^2f}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{df}{d\xi} - \frac{C_r}{C_\theta} \frac{f}{\xi^2} = -\frac{1-\nu^2}{2\xi} \left(\frac{dg}{d\xi}\right)^2 \theta \quad (17)$$

از آنجایی که معادلات (۱۶) نمی‌توانند برای تمامی مقادیر τ ، معادله (۱۴) را ارضاء نمایند، لذا مقدار باقیمانده ε که معرف یک نیروی عرضی اضافی است از طریق حداقل سازی کار مجازی حاصل از این نیرو، تحت یک تغییر مکان مجازی δx حذف می‌شود، در این صورت معادله (۱۴) به شکل تغییر یافته زیر درمی‌آید:

$$\frac{d^4g}{d\xi^4} + \frac{2}{\xi} \frac{d^3g}{d\xi^3} - \frac{E_\theta}{E_r} \frac{1}{\xi^2} \frac{d^2g}{d\xi^2} + \frac{E_\theta}{E_r} \frac{1}{\xi^3} \frac{dg}{d\xi} - \frac{E_\theta}{E_r} \frac{1}{\theta^2} \lambda g - \frac{g}{\theta^3} \frac{1}{1-\nu^2} \frac{1}{C_\theta E_r} \frac{\alpha}{\xi} \frac{df}{d\xi} \left(\frac{dg}{d\xi}\right) = \frac{\phi^*}{\sqrt{\alpha}} \quad (18)$$

که در آن،

$$\lambda = \omega^2, \quad \alpha = \left(\frac{a}{h}\right)^2, \quad \phi^* = \left(\frac{a}{h}\right) \frac{\phi}{\theta^3}$$

در این روابط، α یک پارامتر بی‌بعد دامنه و متناسب با A می‌باشد.

شرایط مرزی (۱۵) به صورت تغییر یافته عبارت است از،

$$\left\{ \frac{dg}{d\xi} = 0, \quad \frac{df}{d\xi} + \frac{C'}{C_\theta} \frac{f}{\xi} = 0, \quad \xi = 0 \right\} \quad (1-19)$$

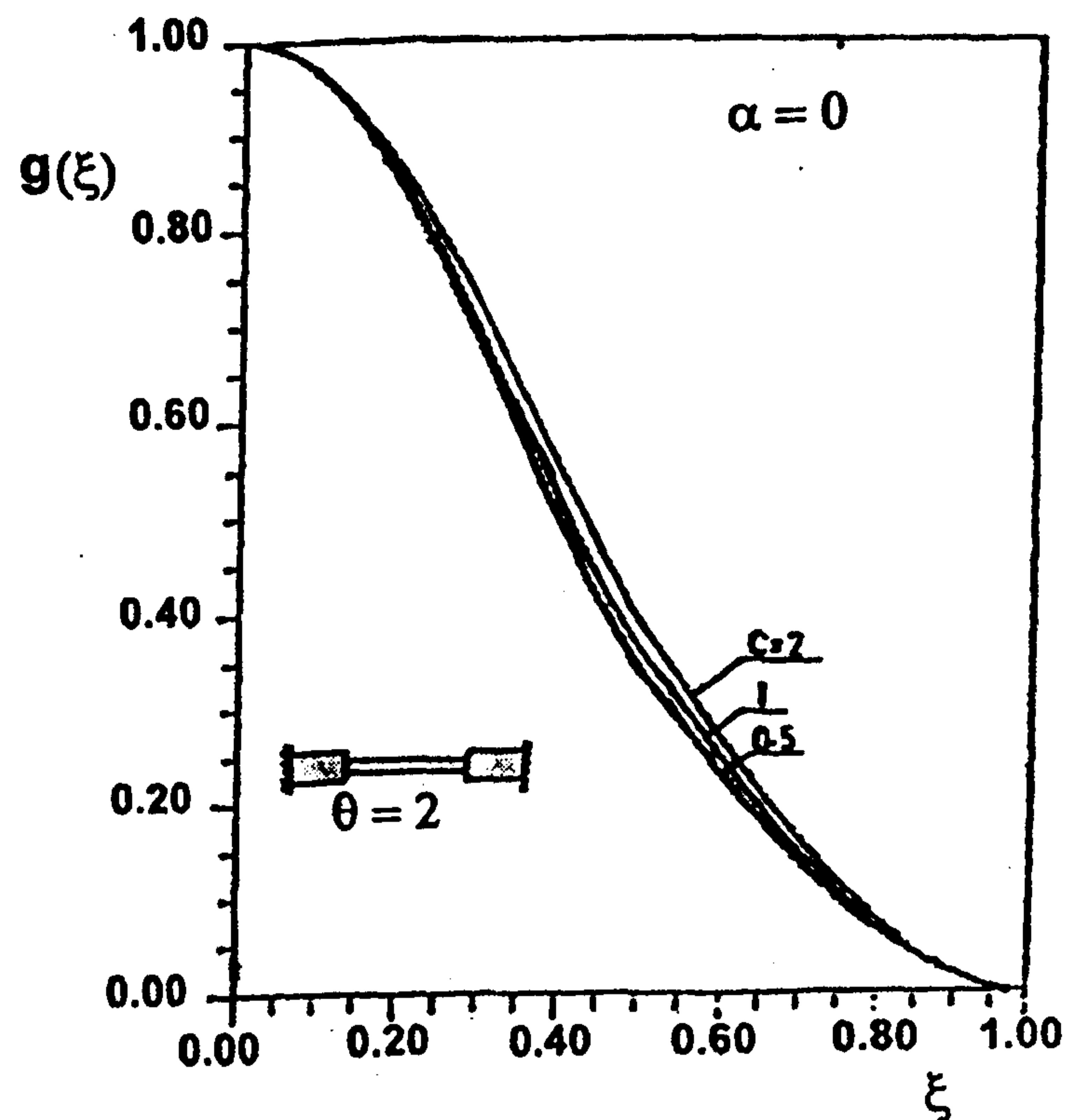
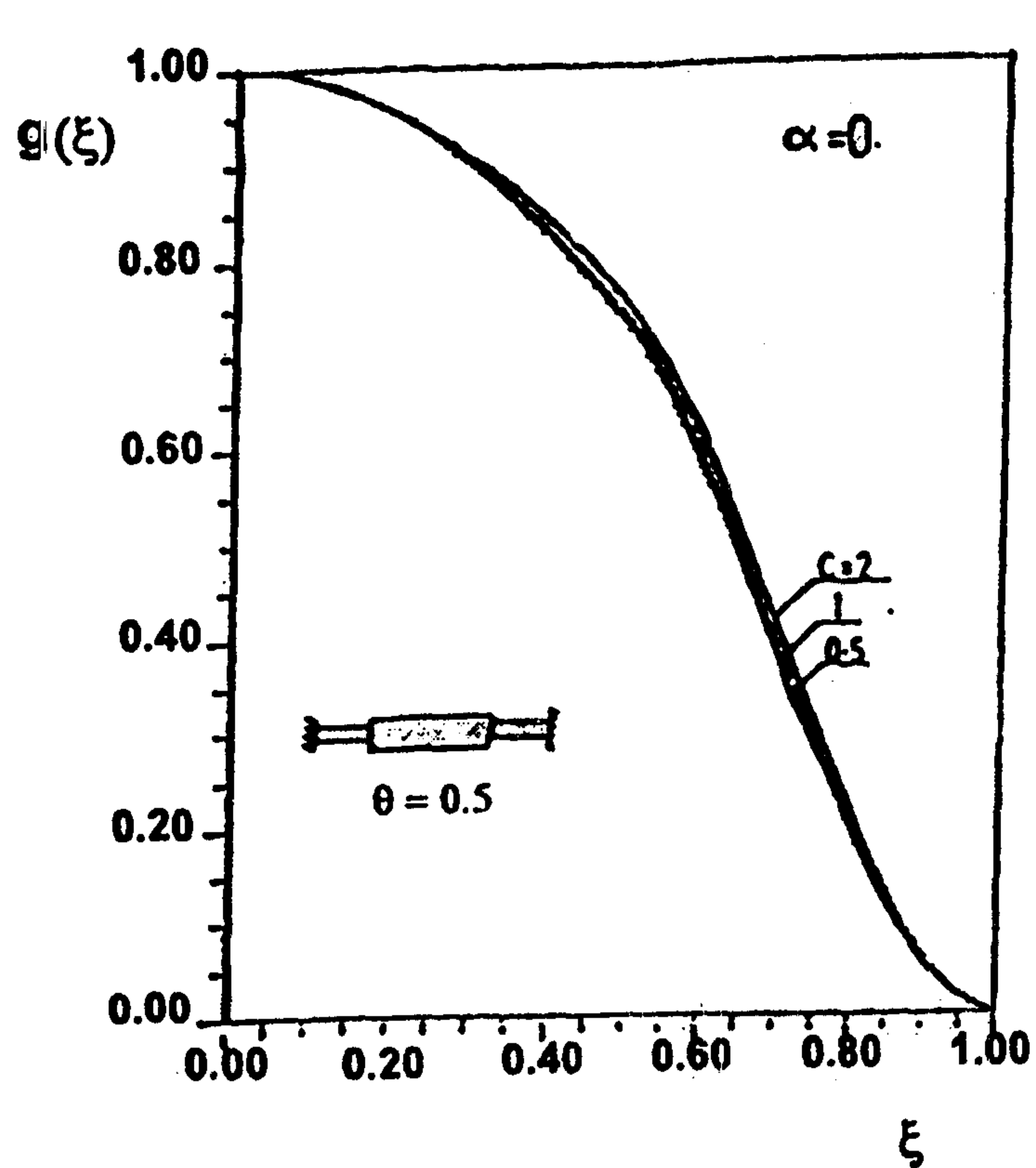
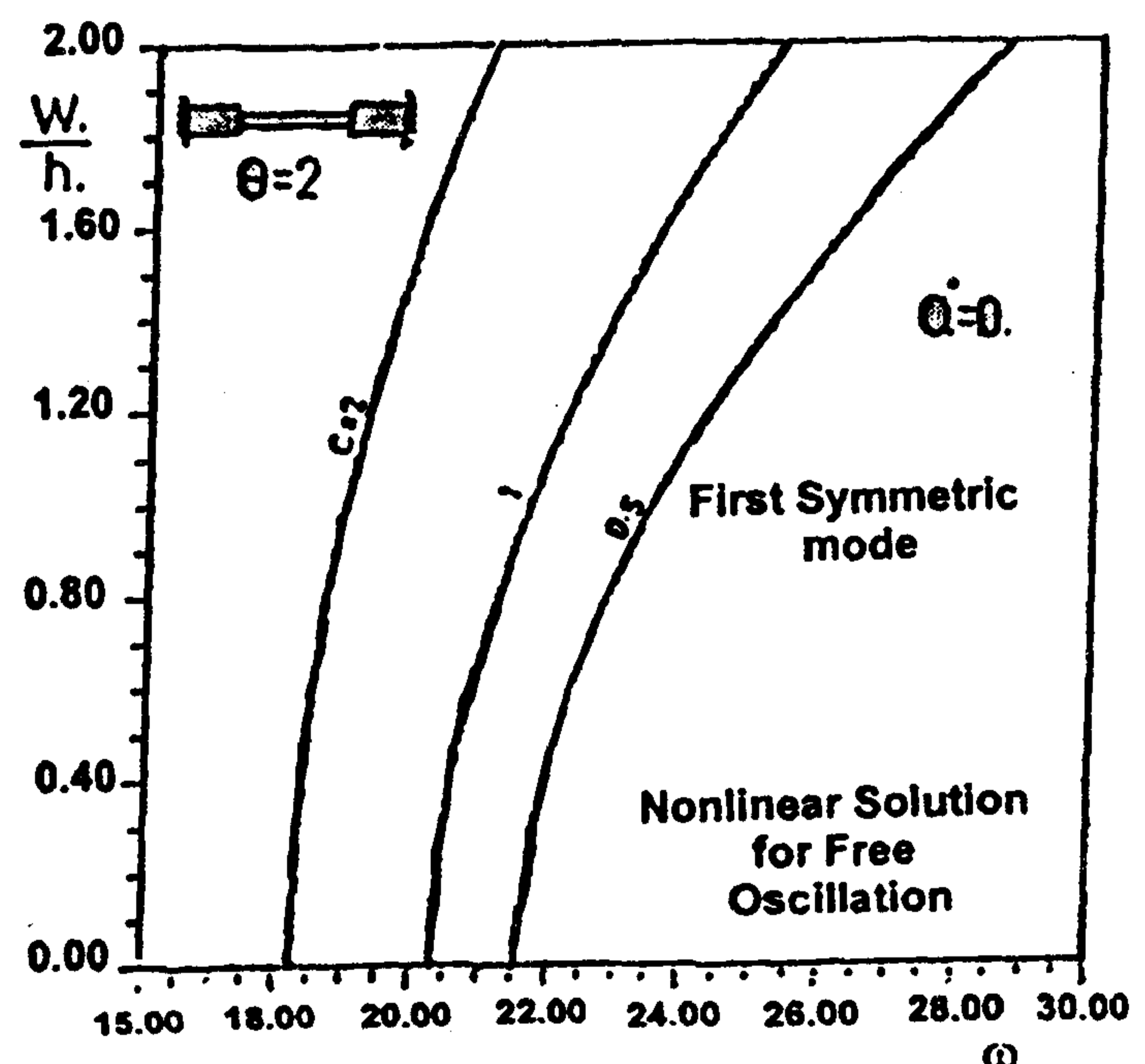
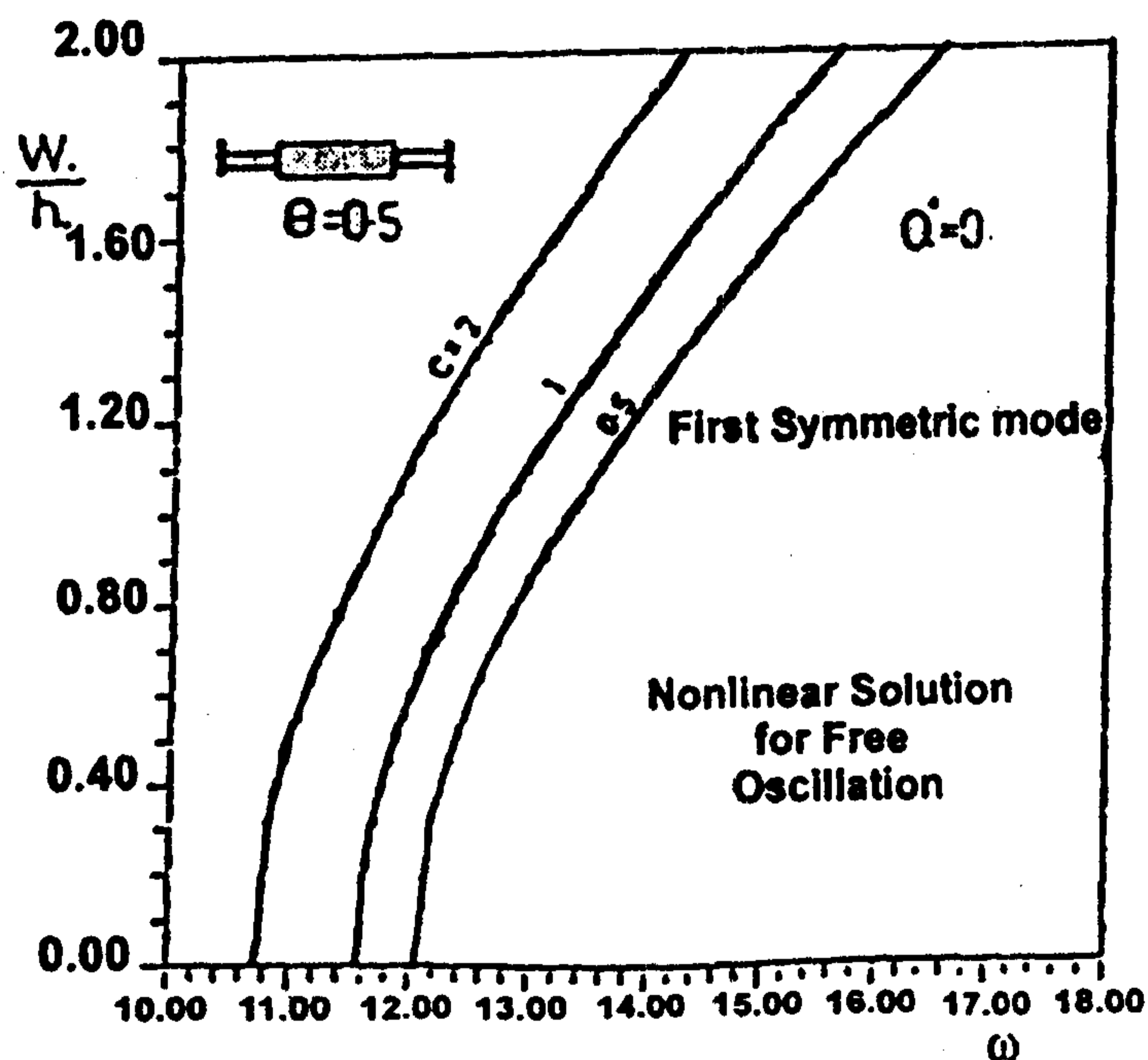
$$\left\{ \frac{d^2g}{d\xi^2} + \frac{E'}{E_r} \frac{1}{\xi} \frac{dg}{d\xi} = 0, \quad \frac{df}{d\xi} + \frac{C'}{C_\theta} \frac{f}{\xi} = 0, \quad \xi = 0 \right\} \quad (2-19)$$

$$\left\{ \frac{dg}{d\xi} = 0, \quad \frac{d^3g}{d\xi^3} + \frac{1}{\xi} \frac{E_\theta}{E_r} \frac{1}{\xi^2} \frac{dg}{d\xi} = 0, \quad f = 0, \quad \xi = 1 \right\} \quad (3-19)$$

معادلات (۱۷)، (۱۸) و (۱۹)، تشکیل یک مسئله مقدار مرزی غیرخطی را می‌دهد که در حالت ارتعاشات آزاد، به صورت یک مسئله مقدار ویژه غیرخطی است و بیانگر پاسخ هارمونیک صفحه با دامنه نوسانات محدود می‌باشد.

حل معادلات دیفرانسیل نسبی به وسیله روش تفاضل محدود

جهت حل سیستم معادلات (۱۷)، (۱۸) و (۱۹)، عبارت‌های

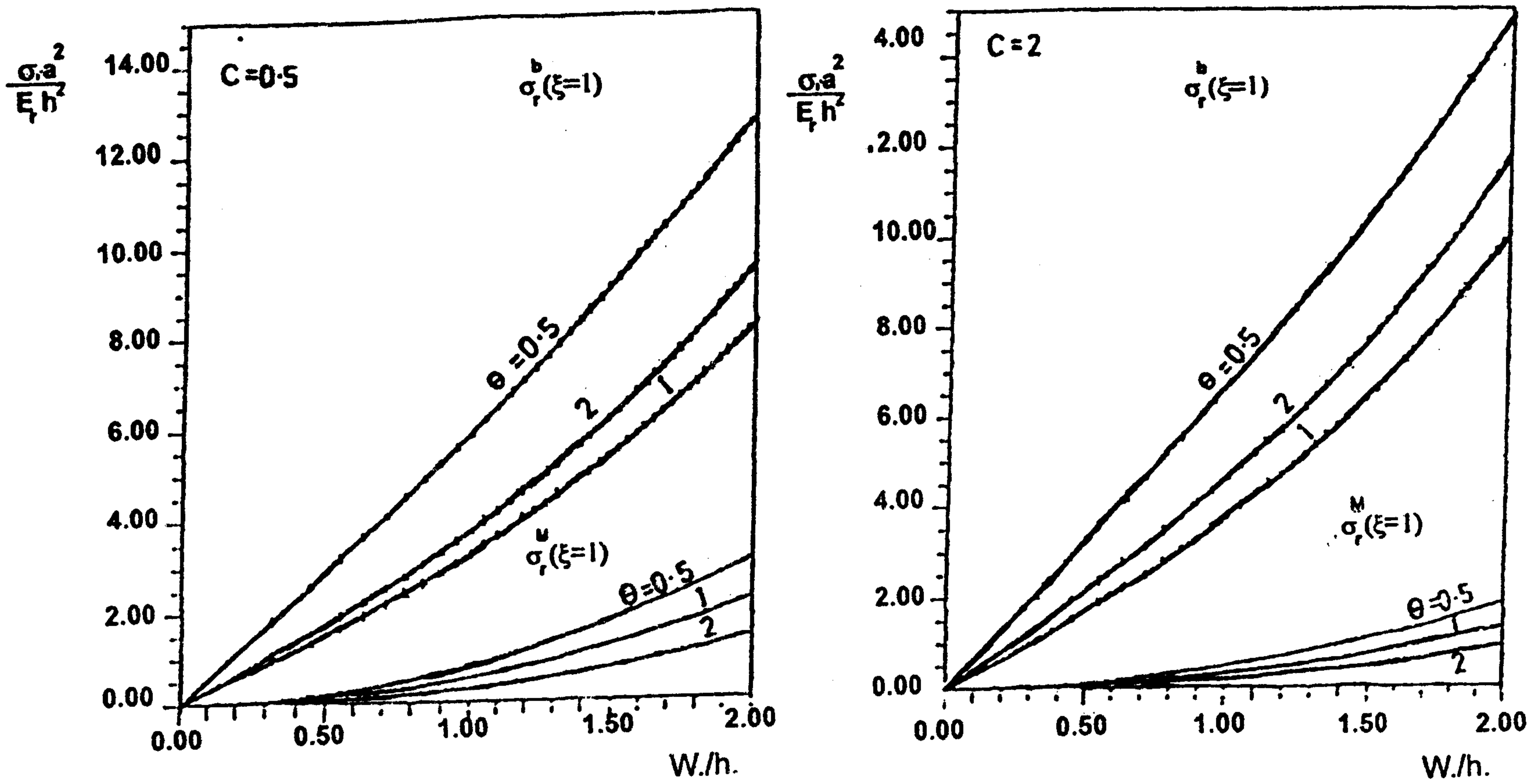
شکل ۲: تغییرات تابع شکل g در مورد اول با مقادیر مختلف C .شکل ۳: تغییرات فرکانس غیرخطی ω با مقادیر مختلف C .

ساده غیرقابل حرکت مقایسه شده است.

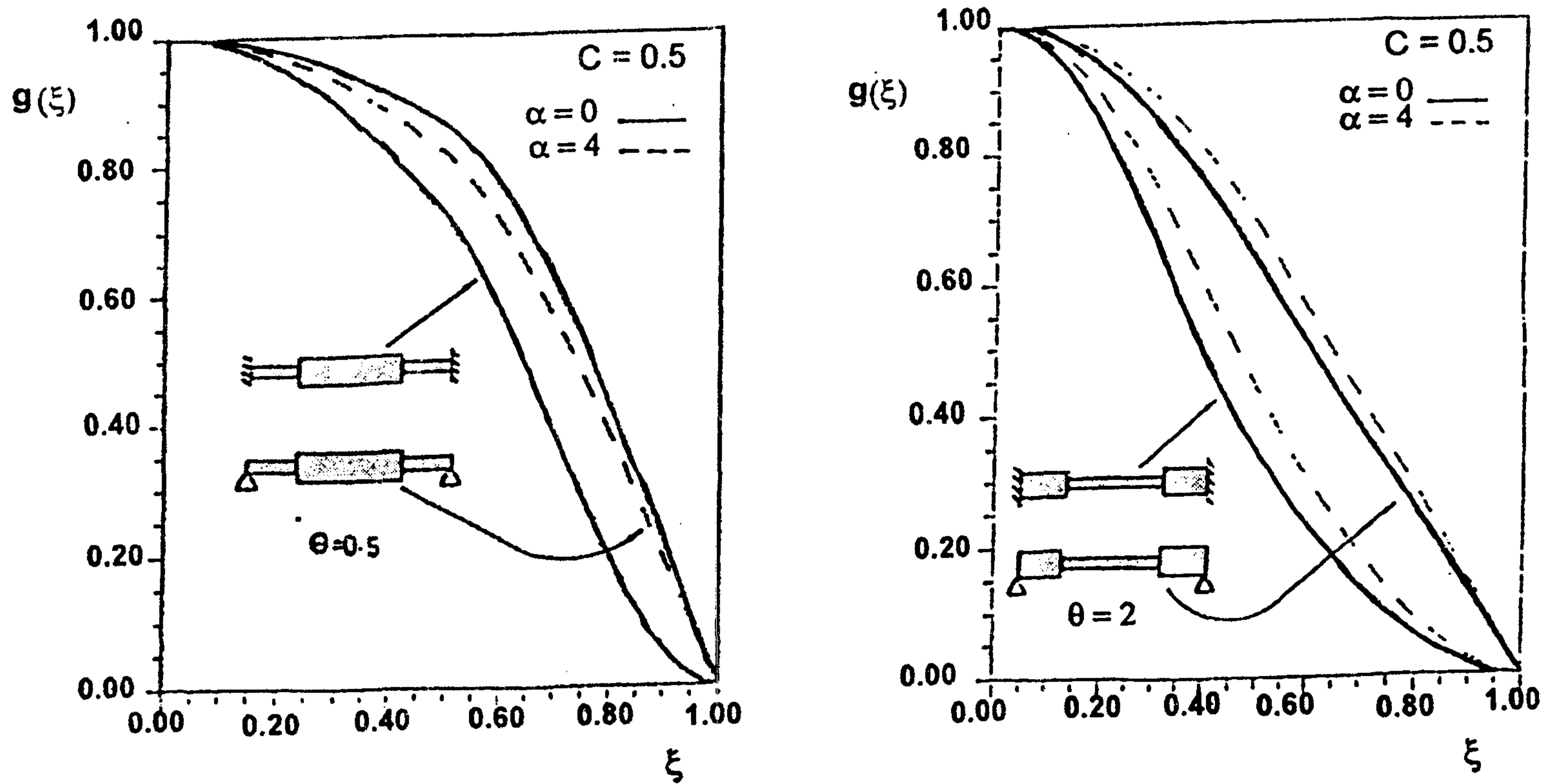
این مقاله نشان می‌دهد که روش فواصل محدود در عین سادگی و سهولت کار کرد، می‌تواند به عنوان روشی مطمئن در حل معادلات نسبی غیرخطی بکار گرفته شود و استفاده از روش‌های تصحیحی جهت کم کردن نقاط انتخابی و اعمال روش‌های محاسبات عددی در کاهش زمان حل معادلات نیز بر کارایی آن می‌افزاید. این مطلب خصوصاً در مودهای بالاتر از یک نمود بیشتری پیدا می‌کند. برخلاف روش شوتینگ، رسیدن به جوابهای

ارتعاشی را به وضوح آشکار می‌نماید. ($C = E_{\theta}/E_r$)

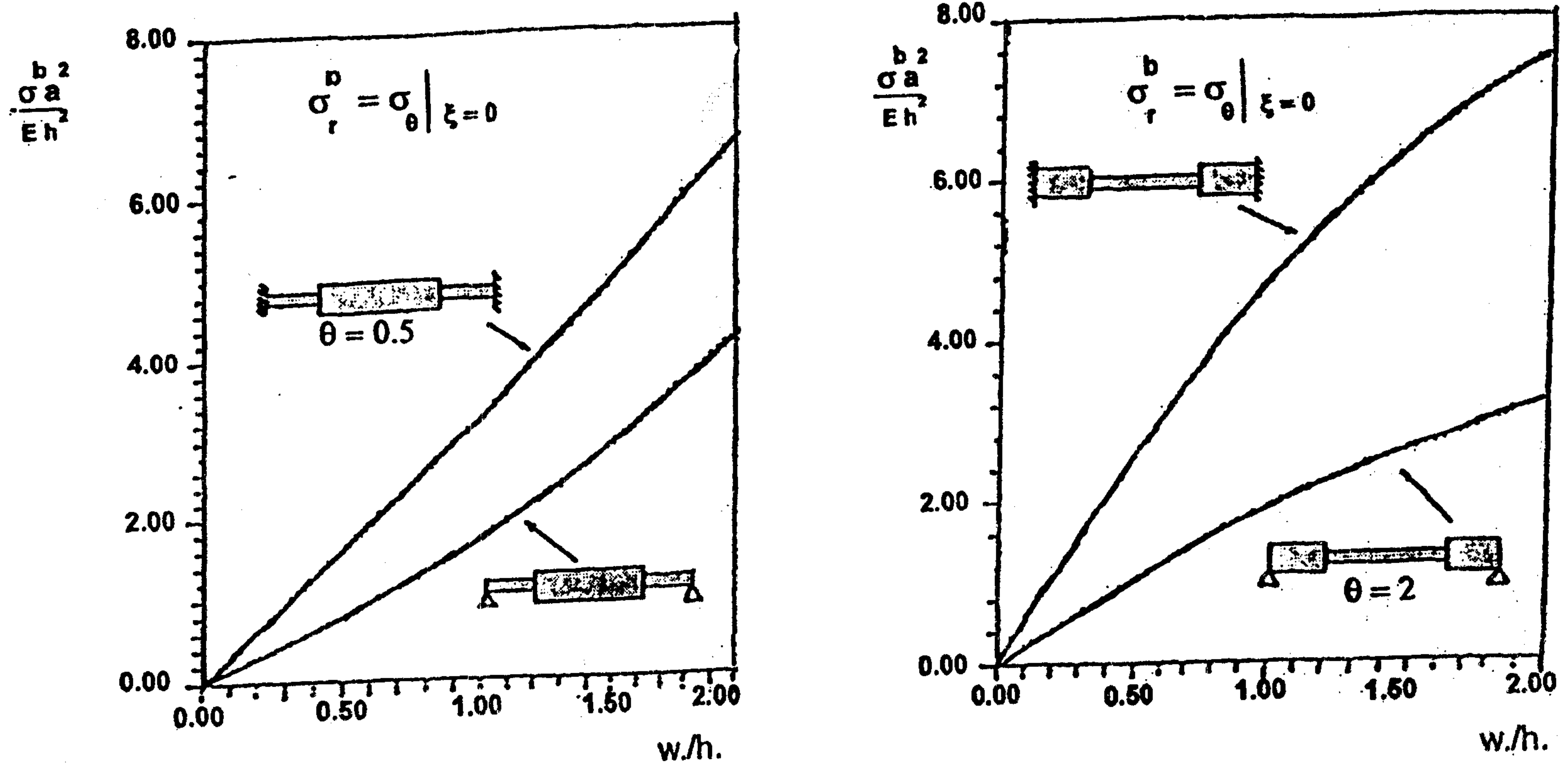
همچنین در شکل (۳) تغییرات فرکانس غیرخطی ω را برای این دو صفحه با تغییر در مقادیر C بیان می‌نمایند و شکل (۴) تغییرات تنش‌های خمشی و غشایی انتهای صفحه را برحسب نسبت خیز مرکز صفحه به ضخامت آن (w_0/h_0) مقایسه می‌کند. شکل (۵) منحنی تغییرات تابع شکل g را برای شرایط مرزی گیردار و ساده غیرقابل حرکت نشان می‌دهد و در شکل‌های (۶) و (۷) تغییرات تنش‌های غشایی و خمشی برای شرایط مرزی گیردار و



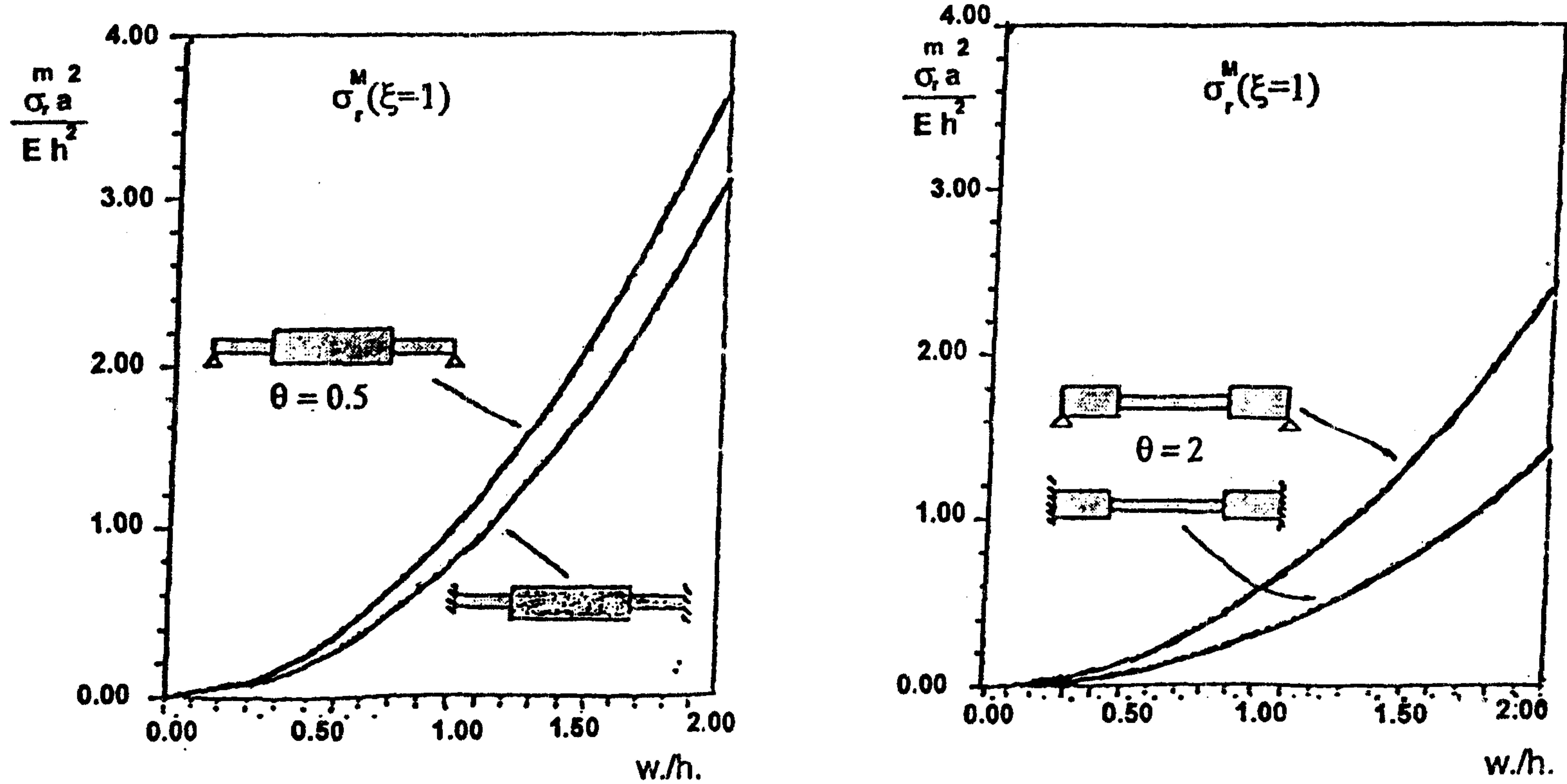
شکل ۴: مقایسه بین تنش های خمشی و غشایی انتهای صفحه با شرایط مرزی گیردار غیرقابل حرکت.



شکل ۵: مقایسه تغییرات تابع شکل g برای شرایط مرزی گیردار و ساده غیرقابل حرکت.



شکل ۶: مقایسه تغییرات تنش غشایی برای شرایط مرزی گیردار و ساده غیرقابل حرکت.



شکل ۷: مقایسه تغییرات تنش خمشی برای شرایط مرزی گیردار و ساده غیرقابل حرکت.

ارتعاشات سیستم، حداقل سازی جهت کم کردن زمان حل مسایل و تطبیق نتایج ریاضی بدست آمده با نمونه های آزمایشگاهی، مطالعات فوق را ادامه داد.

صحیح در روش فواصل محدود در مودهای بالا بسیار پایدارتر و مطمئن تر است و احتیاجی به کاهش تناوب α بین هر دو مرحله آن نیست. در کارهای بعدی می توان در زمینه های پایداری در

مراجع

- 1 - Griogoliuk, E. I. (1945). "Nonlinear vibrations and stability of shell and rods." *Nook, SssR*, No. 3, PP. 33-68.
- 2 - Von Karman, T. (1910). *Encykl wiss.*, Vol. IV4, P. 349.
- 3 - Sandman. B. (1970). *Harmonic oscillations of circular and annular plates at finite amplitudes*. Ph.D Dissertation, Kansas State University.
- 4 - Chi-Lung Huang. and Meng, Y. J. (1972). "Nonlinear oscillations of a non - uniform fixed circular plates." *J. Non-linear*.
- 5 - Chi-Lung huang. (1973). "Finite amplitude vibration of a orthotropic circular plate with an isotropic core." *J. Appl.*
- 6 - Naei, M. H. and Shakeri, M. (1993). "Non linear vibration of aannular plates on linear elastic support." *International Computational Method in Engineering*.
- 7 - Anderson, Dale A., Petcher and Tonnhill. (1985). *Computational fluid mechanics and heat transfer*. McGraw-Hill.
- 8 - Chapra, S. C. (1989). *Numerical methods for engineering*. McGraw-Hill.

واژه نامه

- 1 - Reinforced Plastic
- 2 - Multidimensional

پلاستیک های مسلح
روش چندبعدی