

## شبیه‌سازی عددی جریان تقارن محوری، دائم، لزج و مافوق صوت با استفاده از معادلات ناویر-استوکس سهموی شده (PNS)

وحید اصفهانیان

استادیار گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

کاظم هجران‌فر

دانشجوی دکتری گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۷۶/۴/۱۰، تاریخ تصویب ۷۶/۱۲/۲)

### چکیده

در این مقاله، شبیه‌سازی عددی جریان تقارن محوری، دائم، لزج و مافوق صوت، با استفاده از معادلات ناویر-استوکس سهموی شده (PNS) ارائه شده است. معادلات PNS، با استفاده از حالت دائم معادلات کامل ناویر-استوکس (FNS) و صرف نظر نمودن از مولفه‌های لزجت و شار حرارتی در جهت جریان، در مختصات عمومی منحنی الخط بیان می‌شوند. با استفاده از تقریب لایه صوتی زیرلایه‌ای و ویگنرون، پیشروی پایدار حل عددی معادلات PNS، در ناحیه زیرصوت لایه مرزی امکان‌پذیر است. حل عددی معادلات PNS، با استفاده از الگوریتم اختلاف محدود ضمنی و غیر تکراری بیم-وارمینگ انجام شده است. در این مقاله، با استفاده از معادلات PNS نتایج شبیه‌سازی عددی جریان مافوق صوت روی صفحه تخت و جریان ماوراءصوت روی مخروط سرپخ، با نتایج عددی و تجربی معتبر مقایسه شده است. این مقایسه، صحت و بالابودن میزان دقت نتایج را نشان می‌دهد. جهت ارائه قابلیت‌های نرم‌افزار نوشته شده، PNSAX، شبیه‌سازی عددی جریان مافوق صوت روی اجایو سرپخ نیز صورت گرفته و توزیع میدان، مشخصات جریان روی سطح شامل درجه حرارت، فشار و ...، همچنین ضرایب آیرودینامیکی آن بدست آمده است.

کلید واژه‌ها: جریان تقارن محوری - مافوق صوت - معادلات PNS - تقریب ویگنرون - مخروط سرپخ

### مقدمه

بالا، با استفاده از معادلات ناویر-استوکس سهموی شده (PNS)<sup>(۳)</sup>، در زمان محاسبات و حافظه مورد نیاز کامپیوتری، کاهش قابل توجهی حاصل خواهد شد. مشابه با معادلات لایه مرزی، معادلات PNS در جهت جریان سهموی می‌باشند و با پیشروی از یک صفحه اطلاعات اولیه در فضا، بسمت پایین دست جریان حل می‌شوند برخلاف معادلات FNS و یا TLNS، که با پیشروی اطلاعات سه بعدی در زمان حل می‌شوند. در نتیجه تلاش محاسباتی برای حل معادلات PNS در یک میدان جریان مافوق صوت و لزج، معادل با تلاش محاسباتی یک میدان جریان غیرلزج با استفاده از معادلات اویلر دائم و یا یک

جهت بهبود روشهای عددی موثر، برای حل معادلات ناویر-استوکس تراکم‌پذیر و غیردائم، تلاشهای بسیاری صورت گرفته است. با وجود کارآیی بالای این روشها، برای حل معادلات کامل ناویر-استوکس (FNS)<sup>(۱)</sup> و یا معادلات با تقریب لایه-نازک ناویر-استوکس (TLNS)<sup>(۲)</sup>، زمان محاسباتی و حافظه مورد نیاز کامپیوتری بسیار زیاد می‌باشد. در نتیجه با استفاده از این معادلات، محاسبه جریان حول اجسام سه بعدی به دلیل زمان محاسباتی بالا و محدودیت حافظه کامپیوترهای قابل دسترس موجود (در ایران)، غیرممکن خواهد بود. برای جریانهای دائم، لزج و مافوق صوت با اعداد رینولدز نسبتاً

پایدار مشخص می شود [۱,۲,۳].

### معادلات ناویر-استوکس سهموی شده (PNS)

معادلات ناویر-استوکس سهموی شده (PNS)، از حالت دائم معادلات کامل ناویر-استوکس و با صرف نظر نمودن از مولفه های لزجت و شار حرارتی در جهت جریان نسبت به مولفه ها در جهت مختصه عمودی بدست می آیند. در حالت کلی، معادلات ناویر-استوکس سهموی شده (PNS) با فرضیات زیر حاصل می شوند:

۱- صرف نظر نمودن از عبارتهای غیردائم

۲- صرف نظر نمودن از مولفه های لزجت و شار حرارتی در جهت جریان

۳- تصحیح عبارت فشار معادله ممتم در جهت جریان (جهت پیشروی پایدار حل عددی)

با اعمال فرضیات ۱ و ۲، معادلات کامل ناویر-استوکس برای جریان دوبعدی یا جریان تقارن محوری ( $\beta = 0, 1$ ) را می توان به شکل بقائی، بی بعد و فشرده برای یک گاز کامل در مختصات عمومی منحنی الخط بیان کرد:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \eta} + \beta \bar{H} = 0 \quad (1)$$

که در آن، بردارهای  $\bar{F}$ ،  $\bar{G}$  و  $\bar{H}$  عبارتند از:

$$\bar{F} = \bar{F}_i$$

$$\bar{G} = \bar{G}_i - (\bar{G}_{v1} + \beta \bar{G}_{v2}) \quad (2)$$

$$\bar{H} = \bar{H}_i - (\bar{H}_{v1} + \bar{H}_{v2})$$

برای غلبه بر اثرات بیضوی معادلات PNS در ناحیه زیرصوت لایه مرزی، از دو روش مدل لایه صوتی یعنی تقریب زیرلایه ای<sup>(۲)</sup> و تقریب ویگنرون<sup>(۳)</sup> استفاده می شود. سیمای هر دو روش، در ارتباط با محدودیت اندازه گام برای پیشروی پایدار حل عددی می باشد. در نرم افزار PNSAX، هر دو روش اعمال شده و جهت اختصار تقریب ویگنرون بطور کامل ارائه می شود.

میدان جریان لزج با استفاده از معادلات لایه مرزی می باشد. بر خلاف معادلات لایه مرزی، معادلات PNS در قسمت لزج و غیرلزج جریان معتبر می باشند. بنابراین، برای محاسبه جریانهایی که بین این دو ناحیه، اندرکنش قوی وجود دارد بسیار مناسب خواهند بود. عیب عمده معادلات PNS، عدم محاسبه جدایی جریان در جهت جریان است ولی محاسبه جدایی جریان در جهت عرضی امکان پذیر می باشد. برای پیشروی حل عددی در جهت جریان بسمت پایین دست، یک صفحه اطلاعات اولیه لازم است. این اطلاعات باید در جایی باشد که مولفه سرعت عمود بر این صفحه در خارج لایه مرزی، مافوق صوت گردد. در غیر اینصورت، پیشروی با معادلات PNS میسر نمی باشد. به دلیل وجود اثرات بیضوی ناحیه زیرصوت لایه مرزی، پیشروی پایدار در جهت جریان با استفاده از معادلات PNS همیشه امکان پذیر نیست. دلیل این امر، وجود عبارت گرادیان فشار در جهت جریان در معادله ممتم می باشد که سبب انتشار اطلاعات از پایین دست به بالادست جریان در ناحیه زیرصوت لایه مرزی خواهد شد. برای رفع این مشکل، عبارت گرادیان فشار معادله ممتم در جهت جریان تصحیح می شود تا اثرات بالادست جریان ظاهر نشود. با اینحال، تصحیح عبارت گرادیان فشار در جهت جریان در معادله ممتم، پیشروی پایدار حل عددی را تضمین نمی کند و محدودیتی روی حداقل اندازه گام پایدار وجود خواهد داشت ( $\Delta x > \Delta x_{min}$ ). اگر گام پیشروی از گام پایدار بیشتر شود رشد نمایی حل در مجاورت دیواره، سبب ایجاد حلهای غیر واقعی و انحرافی<sup>(۱)</sup> خواهد شد. این موضوع به دلیل وجود اندرکنش عبارت فشار مابین ناحیه مافوق صوت و زیرصوت جریان است. مطابق با آنالیز پایداری خطی، حداقل اندازه گام پایدار بر اساس ضخامت لایه صوتی در لایه مرزی تعیین می شود و در نتیجه، اثرات بیضوی در این ناحیه از بین می رود. علاوه بر محدودیت حداقل اندازه گام پایدار، هنگامی که برای شرط مرزی شوک در ناحیه محاسباتی از روش برازش شوک استفاده می شود یک محدودیت پایداری عددی دیگر نیز وجود خواهد داشت ( $\Delta x < \Delta x_{max}$ ). این محدودیت پایداری با استفاده از شرط CFL در مرز شوک بیان شده و در نتیجه، حداکثر اندازه گام

با در نظر گرفتن روابط (۱) و (۷)، معادلات ناویر-استوکس سهموی شده (PNS) بشکل برداری مناسب بیان می شوند:

$$\frac{\partial \bar{F}_i}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{G}_i}{\partial \eta} + \beta \bar{H}_i = \frac{\partial \bar{G}_{v_i}}{\partial \eta} + \beta \left[ \frac{\partial \bar{G}_{v_i}}{\partial \eta} + \bar{H}_{v_i} + \bar{H}_{v_i} \right] \quad (۸)$$

که در آن، بردار حل  $\bar{U}$  عبارت است از:

$$\bar{U}^T = J^{-1} \bar{U}^T = J^{-1} [\rho, \rho u, \rho v, E] \quad (۹)$$

و بردارهای غیرلزج  $\bar{F}_i^*$  و  $\bar{P}$ ، بشکل زیر ارائه می شوند:

$$\bar{F}_i^* = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \omega \xi_x p \\ \rho v U + \omega \xi_y p \\ (E+p)U \end{bmatrix}, \quad \bar{P} = J^{-1} \begin{bmatrix} \cdot \\ \xi_x (1-\omega) p \\ \xi_y (1-\omega) p \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (۱۰)$$

و  $U$  و  $V$  مولفه های سرعت پادورد (۱) در مختصات محاسباتی نیز بشکل زیر بیان می شوند:

$$U = \xi_x u + \xi_y v, \quad V = \eta_x u + \eta_y v \quad (۱۱)$$

که در آن،  $u$  و  $v$  مولفه های سرعت در مختصات دکارتی می باشند. جهت بی بعدسازی متغیرها، پارامترهای بی بعد بشکل زیر در نظر گرفته شده اند:

$$x_i = \frac{x_i^*}{R_N}, \quad u_i = \frac{u_i^*}{a_\infty} \sqrt{\gamma}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_\infty}, \quad p = \frac{p^*}{p_\infty}, \quad T = \frac{T^*}{T_\infty}, \quad E = \frac{E^*}{p_\infty}, \quad k = \frac{k^*}{k_\infty}, \quad \mu = \frac{\mu^*}{\mu_\infty} \quad (۱۲)$$

با توجه به روابط (۱۲)، سایر روابط لازم مابین متغیرهای جریان بشکل زیر ارائه می شوند:

$$P = \rho T, \quad E = \rho \left[ e + \frac{1}{\gamma} (u^2 + v^2) \right], \quad Re = \frac{Re_\infty}{\sqrt{\gamma}} \frac{1}{M_\infty}, \quad Re_\infty = \frac{\rho_\infty u_\infty R_N}{\mu_\infty} \quad (۱۳)$$

در روش زیرلایه ای، در معادلات منتمم و انرژی عبارت گرادیان فشار در بردار شار  $\bar{F}_i$  تصحیح می شود:

$$\bar{F}_i = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p_s \\ \rho v U + \xi_y p_s \\ (E+p_s)U \end{bmatrix} \quad (۳)$$

در این روش، گرادیان فشار در جهت جریان  $\frac{\partial p_s}{\partial \xi}$ ، در ناحیه زیرصوت لایه مرزی برابر با گرادیان فشار اولین نقطه مافوق صوت جریان در نظر گرفته می شود [۴]. برای جریانهایی با اعداد ماخ پایین و رینولدز بالا، ضخامت لایه مرزی و لایه صوتی کم است و در نتیجه دقت محاسباتی روش زیرلایه ای افزایش خواهد یافت. در روش ویگنرون، در معادلات منتمم عبارت گرادیان فشار در بردار شار  $\bar{F}_i$  تصحیح می شود. در این روش، گرادیان فشار به دو قسمت صریح و ضمنی تجزیه می شود [۵]. برای تقریب ویگنرون، با در نظر گرفتن تابع وزن  $\omega$ ، داریم:

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \left[ \omega \frac{\partial p}{\partial \xi} \right]_{\text{implicit}} + \left[ (1-\omega) \frac{\partial p}{\partial \xi} \right]_{\text{explicit}} \quad (۴)$$

برای پیشروی پایدار در ناحیه زیرصوت لایه مرزی، تابع وزن  $\omega$ ، با استفاده از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\omega = \begin{cases} \frac{\sigma \gamma M_\xi^2}{1 + (\gamma - 1) M_\xi^2} & M_\xi < 1 \\ 1 & M_\xi > 1 \end{cases} \quad (۵)$$

در این رابطه،  $\sigma$  یک ضریب اطمینان مناسب است و در محدوده  $0.9 - 0.7$  انتخاب می شود.  $M_\xi$  عدد ماخ موضعی در جهت جریان نیز از رابطه زیر تعیین می شود:

$$M_\xi = \frac{\vec{V} \cdot \hat{n}_\xi}{a} = \frac{\xi_x u + \xi_y v}{a \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}} \quad (۶)$$

که در آن،  $a$  سرعت صوت می باشد. با معرفی تقریب ویگنرون در شکل برداری معادلات (۱)، بردار جدید  $\bar{F}_i^*$  تعریف می شود:

$$\bar{F}_i^* = \bar{F}_i - \bar{P} \quad (۷)$$

جدول ۱: نوع روش عددی و خطای آن.

خطا	$\theta_r$	$\theta_l$	روش
$O[(\Delta\xi)^2]$	۰	۱	اویلر، ضمنی
$O[(\Delta\xi)^2]$	۱/۲	۱	سه نقطه‌ای پسرو، ضمنی

$$A^{*i} = \left[ \frac{\partial \bar{F}_i^*}{\partial \bar{U}} \right]^i, \quad B^i = \left[ \frac{\partial \bar{G}_i}{\partial \bar{U}} \right]^i, \quad K^i = \left[ \frac{\partial \bar{H}_i}{\partial \bar{U}} \right]^i$$

$$M^i = \left[ \frac{\partial \bar{G}_{v1}}{\partial \bar{U}} - Q_\eta \right]^i, \quad N^i = \left[ \frac{\partial \bar{H}_{v1}}{\partial \bar{U}} - W_\eta \right]^i$$

$$Q^i = \left[ \frac{\partial \bar{G}_{v1}}{\partial \bar{U}_\eta} \right]^i, \quad W^i = \left[ \frac{\partial \bar{H}_{v1}}{\partial \bar{U}_\eta} \right]^i$$

$$M_1^i = \left[ \frac{\partial \bar{G}_{v1}}{\partial \bar{U}} \right]^i, \quad N_1^i = \left[ \frac{\partial \bar{H}_{v1}}{\partial \bar{U}} \right]^i \quad (18)$$

شکل مناسب معادله (۱۷)، جهت حل عددی معادلات PNS بدست می‌آید:

$$\left[ A^{*i} + \frac{\theta_l \Delta \xi}{1 + \theta_r} \left[ \bar{\delta}_\eta (B^i - M^i - M_1^i) - \nabla_\eta \Delta_\eta Q^i \right] + \beta \left[ K^i - N^i - N_1^i - \bar{\delta}_\eta W^i \right] \right] \Delta \bar{U}^i =$$

$$- \frac{\Delta \xi}{1 + \theta_r} \left[ \frac{\partial \bar{G}}{\partial \eta} + \beta \bar{H} \right]^i + \frac{\theta_r}{1 + \theta_r} \Delta \bar{F}^{i-1}$$

$$- \Delta \bar{P}^i - \Delta \xi \left[ \frac{\partial \bar{F}^*}{\partial \xi} \right]^i_{\bar{U}}$$

$$- \frac{\theta_l (\Delta \xi)^2}{1 + \theta_r} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{\partial \bar{G}}{\partial \xi} \right]^i_{\bar{U}, \bar{U}_\eta} + \beta \left[ \frac{\partial \bar{H}}{\partial \xi} \right]^i_{\bar{U}, \bar{U}_\eta} \right] \quad (19)$$

که در آن، داریم:

$$\Delta \bar{U}^i = \bar{U}^{i+1} - \bar{U}^i \quad (20)$$

در معادله (۱۹)، تقریب اختلاف محدود عبارت فشار نسبت به درجه دقت مورد نظر بشکل زیر ارائه می‌شود:

$$\Delta \bar{P}^i = \Delta \bar{P}^{i-1} + O(\Delta \xi)$$

$$\Delta \bar{P}^i = 2 \Delta \bar{P}^{i-1} - \Delta \bar{P}^{i-2} + O(\Delta \xi)^2 \quad (21)$$

در روابط فوق،  $\rho$  دانسیته،  $p$  فشار،  $T$  درجه حرارت،  $E$  انرژی کل بر واحد حجم،  $Pr$  عدد پراتل و  $R_N$  شعاع پخ دماغه می‌باشند. در این مقاله، عدد پراتل ثابت و برابر با  $0.72$  در نظر گرفته شده است. تغییرات لزجت  $\mu$ ، نسبت به درجه حرارت نیز توسط رابطه سادرلند<sup>(۱)</sup> محاسبه می‌شود:

$$\mu = \left( \frac{1+c}{c+T} \right) T^{c/T}, \quad c = \frac{110/4^\circ K}{T_\infty} \quad (14)$$

با در نظر گرفتن نگاشت محورهای مختصات از دامنه فیزیکی  $(x, y)$  به دامنه محاسباتی  $(\xi, \eta)$ :

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \quad (15)$$

متریکها و ژاکوبین تبدیل، با استفاده از روابط زیر تعیین می‌شوند:

$$\xi_x = J y_\eta, \quad \xi_y = -J x_\eta, \quad \eta_x = -J y_\xi, \quad \eta_y = J x_\xi$$

$$J^{-1} = x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta \quad (16)$$

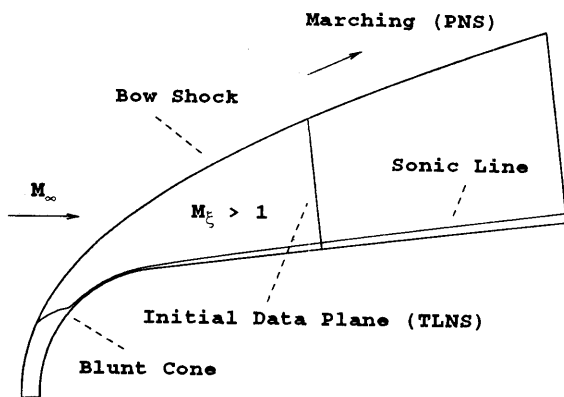
حل عددی معادلات ناویر-استوکس سهموی شده (PNS)

برای پیشروی حل در جهت جریان، شکل اختلاف محدود معادلات PNS با استفاده از الگوریتم بیم-وارمینگ<sup>(۲)</sup> بدست می‌آید [۶]. در نتیجه، برای اندازه گام پیشروی  $\Delta \xi$ ، تقریب اختلاف محدود پیشروی برای بردار  $\bar{F}$  بشکل زیر ارائه می‌شود:

$$\Delta \bar{F}^i = \frac{\theta_l \Delta \xi}{1 + \theta_r} \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta \bar{F}^i + \frac{\Delta \xi}{1 + \theta_r} \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{F}^i +$$

$$\frac{\theta_r}{1 + \theta_r} \Delta \bar{F}^{i-1} + O\left[ \left( \theta_l - \frac{1}{3} - \theta_r \right) \Delta \xi^2 + \Delta \xi^2 \right] \quad (17)$$

در رابطه (۱۷)، ضرایب  $\theta_l$  و  $\theta_r$  بسته به نوع روش و میزان دقت، مطابق با مقادیر جدول ۱ انتخاب می‌شوند. با اعمال روش بیم-وارمینگ در معادلات (۸) و با معرفی ماتریسهای ژاکوبین مربوط به بردارهای غیرلزج و ماتریسهای ژاکوبین مربوط به بردارهای لزج:



شکل ۱: موقعیت اولیه و فرآیند پیشروی حل عددی معادلات PNS برای جریان ماوراءصوت روی مخروط سرخ.

با تقریب لایه-نازک ناویر-استوکس (TLNS) روی دماغه فراهم شده است [۷]. در شکل ۱، نمایی از موقعیت اولیه و نحوه پیشروی حل عددی توسط معادلات PNS، برای جریان ماوراءصوت روی مخروط سرخ ارائه شده است.

### شرایط مرزی

شرایط مرزی شامل شرط مرزی بدنه و شرط مرزی شوک می باشد. نحوه اعمال شرایط مرزی در سیستم معادلات (۱۹)، شبیه به روش ارائه شده در مرجع [۸] می باشد.

#### شرط مرزی بدنه

در سطح جسم، شرط عدم لغزش ( $u = v = 0$ ) استفاده می شود و گرادیان فشار عمود بر سطح جسم، صفر در نظر گرفته می شود. در نتیجه، هنگامی که درجه حرارت سطح ( $T_w$ ) مشخص باشد با استفاده از معادله حالت خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \rho}{\partial n} = -\frac{\rho}{T_w} \frac{\partial T}{\partial n} \quad (24)$$

معادلات (۱۹)، یک سیستم ماتریسی سه قطری بلوکی  $4 \times 4$  می باشند. در هر مرحله از پیشروی بازاء هر  $\xi$  ثابت، با حل این سیستم معادلات، بردار  $\Delta \bar{U}^i$  تعیین می شود. سپس بردار جواب بشکل زیر محاسبه می شود:

$$\bar{U}^{i+1} = \bar{U}^i + \Delta \bar{U}^i \quad (22)$$

برای میرائی نوسانات با فرکانسهای بالا، عبارت میرائی صریح مرتبه چهار ( $S_{E,\eta}$ ) و عبارت میرائی ضمنی مرتبه دو ( $S_{I,\eta}$ ) مطابق با روابط زیر:

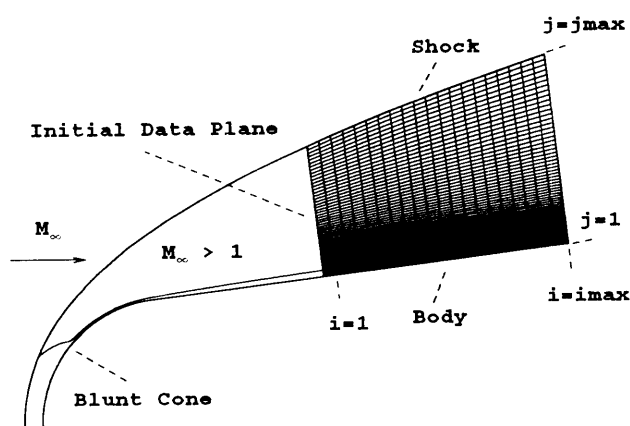
$$S_{E,\eta} = -\varepsilon_{E,\eta} J^{-1} [\nabla_{\eta} \Delta_{\eta}]^T J \bar{F}^*$$

$$S_{I,\eta} = -\varepsilon_{I,\eta} J^{-1} [\nabla_{\eta} \Delta_{\eta}] J \left[ \frac{\partial \bar{F}^*}{\partial U} \right]_i \Delta \bar{U}^i \quad (23)$$

به ترتیب، به سمت راست و سمت چپ معادله (۱۹) اضافه می شوند. با استفاده از تئوری پایداری خطی برای روش ضمنی اولر، محدوده پایدار ضریب میرایی عبارت صریح  $\varepsilon_{E,\eta}$  کوچکتر از  $1/8$  می باشد و ضریب میرایی عبارت ضمنی  $\varepsilon_{I,\eta}$  دو تا سه برابر  $\varepsilon_{E,\eta}$  انتخاب می شود.

### شرایط اولیه

مشابه با معادلات لایه مرزی، پیشروی حل عددی در جهت جریان با معادلات PNS، نیاز به یک داده اولیه مناسب دارد. این اطلاعات باید در جایی باشد که مولفه سرعت عمود بر این صفحه در خارج لایه مرزی، مافوق صوت گردد. در غیر اینصورت، پیشروی با معادلات PNS امکان پذیر نخواهد بود. برای حالتی که دماغه جسم مانند مخروط نوک تیز باشد اطلاعات اولیه را می توان از حل معادلات PNS بدست آورد. بدین ترتیب که با یک حدس اولیه مناسب، پیشروی با معادلات PNS صورت می گیرد. سپس با در نظر گرفتن این نتایج بعنوان نتایج اولیه، پیشروی از موقعیت اولیه بطور مجدد انجام می شود. این عمل تا همگرایی نتایج تکرار می شود [۴]. در این مقاله، دماغه جسم سرخ در نظر گرفته شده و اطلاعات اولیه لازم برای پیشروی حل عددی معادلات PNS، از حل معادلات



شکل ۲: ایجاد شبکه به روش برازش شوک برای جریان ماوراءصوت روی مخروط سرخ.

معادله مشخصه (۲۵) مقایسه می‌شود. در نتیجه، با تصحیح شیب شوک در موقعیت  $i + 1$ ، حلقه تکرار تا برابری مقادیر فشار انجام می‌شود.

#### شبکه‌بندی

در روش برازش شوک، برای تعیین مشخصات جریان در مرز شوک باید در هر مرحله از پیشروی، شبکه مناسبی ایجاد کرد. در این مقاله، جهت پیشروی حل عددی با استفاده از معادلات PNS و افزایش سرعت محاسبه میدان جریان از یک شبکه جبری استفاده شده است. در این شبکه‌بندی خطوط  $\xi$  ثابت، عمود بر سطح جسم و یا عمود بر محور طولی انتخاب می‌شوند. به دلیل وجود اثرات لزجت و بالابودن گرادیان سرعت، درجه حرارت و ... در مجاورت دیواره، تجمع خطوط  $\eta$  ثابت در این ناحیه صورت می‌گیرد تا محاسبات میدان جریان دقیق‌تر انجام شود. اگر  $(x_b, y_b)$  و  $(x_s, y_s)$  به ترتیب مختصات سطح جسم و مرز شوک باشند مختصات شبکه بشکل زیر تعیین می‌شوند:

در این حالت، با استفاده از شرط مرزی می‌توان نرخ انتقال حرارت ورودی به سطح را محاسبه کرد. برای شرط دیواره آدیاباتیک، گرادیان دمایی عمود بر سطح جسم صفر می‌باشد و مطابق با معادله (۲۴)، گرادیان دانسیته عمود بر سطح جسم نیز صفر خواهد شد. در هر مرحله از پیشروی، بعد از تعیین بردار حل در موقعیت  $i + 1$ ، با استفاده از شکل اختلاف محدود پیشرو مرتبه دو، متغیرهای جریان در سطح جسم تصحیح می‌شوند.

#### شرط مرزی شوک

روشهای عددی جهت محاسبه میدانهای جریان توام با موجهای شوک، از دو روش تسخیر شوک<sup>(۱)</sup> و روش برازش شوک<sup>(۲)</sup> استفاده می‌کنند. در این مقاله، از روش برازش شوک استفاده شده است. در این روش، موج شوک بمنزله یک سطح ناپیوسته در نظر گرفته می‌شود و شکل آن بعنوان قسمتی از حل، با استفاده از روابط شوک مایل و میدان جریان داخل تعیین می‌شود. مزیت این روش این است که شوک بعنوان یک سطح برازش می‌شود و عیب آن در محدودیت حداکثر گام پایدار، جهت پیشروی می‌باشد. برای برازش شوک کماتی، میدان جریان در مجاورت موج شوک غیرلج فرض می‌شود. برای محاسبه متغیرهای جریان در مرز داخلی شوک، روابط شوک رانکین هوگنیت<sup>(۳)</sup> کافی نمی‌باشند و معادله دیگری که موج شوک را با میدان جریان داخل مرتبط می‌نماید لازم است. با استفاده از معادله پیوستگی و در نظر گرفتن این حقیقت که آنتروپی در طول هر خط جریان ثابت است معادله موردنظر بشکل زیر ارائه می‌شود:

$$(\xi_x u + \xi_y v) p_\xi + (\eta_x u + \eta_y v) p_\eta +$$

$$\rho a^2 (\xi_x u_\xi + \xi_y v_\xi + \eta_x u_\eta + \eta_y v_\eta + \beta \frac{v}{y}) = 0 \quad (25)$$

در هر مرحله از پیشروی، بعد از تعیین بردار حل در موقعیت  $i + 1$ ، تصحیح متغیرهای جریان در مرز شوک صورت می‌گیرد. برای تصحیح متغیرهای جریان در مرز شوک، با استفاده از روابط رانکین هوگنیت، فشار در مرز داخلی شوک محاسبه می‌شود و با فشار تعیین شده از

غیرلج  $\bar{G}_i$ ، در شکل خطی شده معادلات اویلر دائم بدست می آید. بنابراین، برای پیشروی پایدار حل عددی، حداکثر اندازه گام توسط رابطه زیر تعیین می شود [۳]:

$$\Delta\xi < \frac{CFL_\eta \Delta\eta}{|\lambda_\eta|_{\max}} \quad (29)$$

در این رابطه،  $|\lambda_\eta|_{\max}$  ماکزیمم مقدار ویژه ماتریس  $[A]^{-1}[B]$  در مرز شوک می باشد. همچنین  $CFL_\eta$  عدد کورانت بوده و برای پایداری محاسبات عددی در مسائل غیرخطی، مابین  $0/9 - 0/2$  انتخاب می شود. با وجود محدودیت گام پایدار، با یک اندازه گام ثابت و مناسب که در محدوده گام پایدار باشد می توان پیشروی پایدار حل عددی معادلات PNS را انجام داد. در این مقاله، اندازه گام پیشروی بر اساس محدوده گام پایدار، ثابت در نظر گرفته شده است.

### نتایج

در این مقاله، نتایج حاصل از نرم افزار PNSAX برای جریان مافوق صوت روی صفحه تخت و جریان ماوراءصوت روی مخروط سرخ، با نتایج عددی و تجربی معتبر مقایسه شده است. در ادامه، برای نشان دادن قابلیت های نرم افزار PNSAX، نتایج شبه سازی جریان مافوق صوت روی اجایو سرخ نیز ارائه شده است. لازم بذکر است که محاسبات بر روی کامپیوتری 586-120 MHZ انجام شده است. حداکثر زمان کامپیوتری لازم جهت اجراء محاسبات حدود ۵ دقیقه و حافظه مورد نیاز کامپیوتری نیز حدود ۱ MB می باشد.

شبه سازی عددی جریان مافوق صوت روی صفحه تخت جهت نشان دادن صحت و دقت نرم افزار (PNSAX)، نتایج شبه سازی عددی جریان دوبعدی و مافوق صوت روی صفحه تخت با  $L = 1 \text{ m}$ ،  $M_\infty = 2$ ،  $T_w = T_\infty = 222^\circ \text{K}$  و  $Re_\infty = 1/65 \times 10^6$  با نتایج عددی معتبر مقایسه شده است. نتایج عددی بر اساس نتایج مراجع [۷] و [۹] می باشد. در این شبه سازی، تعداد نقاط شبکه در جهت عمود بر سطح  $J_{\max} = 100$  اندازه گام

$$x^{i+1} = x_b^{i+1} + (x_s - x_b)^{i+1} \bar{\alpha}$$

$$y^{i+1} = y_b^{i+1} + (y_s - y_b)^{i+1} \bar{\alpha} \quad (26)$$

که در آن، تابع کشش  $\bar{\alpha}$ ، عبارت است از:

$$\bar{\alpha} = 1 + \bar{\beta} \left[ \frac{1 - \hat{\beta}^{(1-\eta/\eta_{\max})}}{1 + \hat{\beta}^{(1-\eta/\eta_{\max})}} \right], \quad \hat{\beta} = \frac{\bar{\beta} + 1}{\bar{\beta} - 1} \quad (27)$$

ضریب کشش  $\bar{\beta}$ ، بطور معمول در محدوده  $1/2 - 1/0.01$  انتخاب می شود. در شکل ۲، نمایی از مشخصات شبکه ایجادی جهت حل عددی معادلات PNS، برای جریان ماوراءصوت روی مخروط سرخ ارائه شده است.

### محدودیت اندازه گام، جهت پیشروی پایدار حل عددی

به دلیل وجود اندرکنش عبارت فشار مابین ناحیه مافوق صوت و زیرصوت جریان، محدودیتی روی اندازه گام پایدار وجود خواهد داشت. با استفاده از تئوری پایداری خطی، برای پیشروی پایدار حل عددی حداقل اندازه گام از رابطه زیر محاسبه می شود [۲]:

$$\Delta\xi > \frac{2}{\pi} \delta_s \quad (28)$$

که در آن،  $\delta_s$  ضخامت لایه صوتی می باشد. اگر اندازه گام پیشروی از محدوده گام پایدار کمتر شود بردار حل در مجاورت سطح نوسان خواهد کرد. حداکثر اندازه گام پیشروی، بر اساس شرط مرزی شوک تعیین می شود. با توجه به اینکه الگوریتم ضمنی حل عددی معادلات PNS، با یک روش انتگرالی صریح جهت پیشروی شوک کمانی توام است یک محدودیت پایداری صریح روی برونیابی مرز شوک ایجاد می شود. اگر اندازه گام پیشروی از محدوده گام پایدار بیشتر شود بردار حل در مجاورت مرز شوک، نوسان خواهد نمود. در نتیجه، ناپایداری در الگوریتم برازش شوک و پیشروی حل معادلات PNS ظاهر می شود. محدوده پایدار گام پیشروی توسط شرط CFL، در طول مرز شوک محاسبه می شود. این شرط از روی مقادیر ویژه ماتریس مربوط به بردار شار

ارائه شده است. ایجاد شبکه در هر مرحله از پیشروی، با استفاده از برازش شوک صورت گرفته است. در این شکل، موقعیت شروع پیشروی حل عددی نیز مشخص شده است. خطوط  $\xi$  ثابت، عمود بر سطح می باشند تا اعمال شرط مرزی دیواره به سهولت انجام شود. همچنین به دلیل وجود گرادیانهای زیاد، تجمع خطوط  $\eta$  ثابت در نزدیکی دیواره صورت گرفته است. مقایسه نتایج نرم افزار PNSAX برای موقعیت و شیب شوک با نتایج حل معادلات TLNS، نشان دهنده دقت خوب روش برازش شوک می باشد. در شکل ۵، نتایج نرم افزار PNSAX برای خطوط همتراز عدد ماخ، دانسیته، فشار و درجه حرارت تا موقعیت  $S/R_N = 20$  روی مخروط سرپخ ارائه شده است. در شکل ۶، نتایج نرم افزار PNSAX برای توزیع فشار، درجه حرارت، ضریب فشار و ضریب اصطکاک پوسته ای سطح تا موقعیت  $S/R_N = 20$  روی مخروط سرپخ ارائه شده است. مقایسه نشان می دهد که میزان دقت نتایج بالا می باشد. با این وجود، در شروع پیشروی اختلاف اندکی در منحنی تغییرات درجه حرارت مشاهده می شود که مبین حساسیت معادلات PNS به پارامتر درجه حرارت می باشد. در شکل ۷، نتایج نرم افزار PNSAX برای توزیع سرعت، دانسیته، فشار و درجه حرارت در جهت عمود بر سطح مخروط سرپخ در موقعیتهای مختلف تا  $S/R_N = 20$  ارائه شده است. مقایسه نشان می دهد که نتایج از دقت بالائی برخوردار می باشد. در شکل ۸، نتایج نرم افزار PNSAX برای موقعیت شوک، شیب شوک، فشار و درجه حرارت سطح تا موقعیت  $S/R_N = 250$  روی مخروط سرپخ ارائه شده است. برای منحنیهای فشار و درجه حرارت، نتایج تجربی نیز ارائه شده است. مقایسه نشان می دهد که نتایج از دقت بالائی برخوردار می باشد. منحنی تغییرات شیب شوک شامل یک نقطه برگشتی<sup>(۲)</sup> است و در پایین دست جریان، به مقدار شیب شوک برای مخروط نوک تیز معادل میل می کند. وجود نقطه برگشتی به دلیل وجود موجهای حاصل از تغییرات انبساطی زیاد فشار است. شیب شوک در نقطه برگشتی برابر با  $\delta = 9/4313^\circ$  می باشد. منحنی تغییرات فشار روی سطح مخروط سرپخ نشان می دهد که فشار از مقدار ماکزیمم در نقطه سکون کاهش می یابد و به دلیل انبساط زیاد، شامل یک نقطه

پیشروی  $\Delta S = 0/001$  و ضریب کشش  $\bar{\beta} = 1/001$  انتخاب شده است. شرط اولیه لازم جهت پیشروی معادلات PNS توسط مرجع [۷] حاصل شده است. در شکل ۳، نتایج نرم افزار PNSAX برای توزیع سرعت و درجه حرارت در موقعیت  $x/L = 0/93$  با نتایج مرجع [۷] مقایسه شده است. در این شکل، مقایسه نتایج نرم افزار PNSAX برای منحنی تغییرات ضریب اصطکاک پوسته ای و ضریب انتقال حرارت سطح با مرجع [۹] نیز ارائه شده است. مقایسه نشان دهنده دقت خوب نتایج می باشد.

شبیه سازی عددی جریان ماوراءصوت روی مخروط سرپخ جهت بررسی صحت و میزان دقت نرم افزار PNSAX، نتایج شبیه سازی عددی جریان ماوراءصوت روی مخروط سرپخ با دیواره آدیاباتیک،  $\theta_c = 7^\circ$ ،  $R_N = 0/381$  cm،  $M_\infty = 8$ ،  $Re_\infty = 31250$  و  $T_\infty = 54/3^\circ K$ ، با نتایج عددی و تجربی معتبر مقایسه شده است. نتایج تجربی بر اساس نتایج STDS<sup>(۱)</sup> تا موقعیت  $S/R_N = 228$  می باشد [۱۰]. نتایج عددی بر اساس نتایج نرم افزار BLUNT می باشد که این نرم افزار توسط اصفهانیان نوشته شده است [۷]. نتایج نرم افزار BLUNT برای شبکه ایی با تعداد نقاط  $(J_{max}, I_{max}) = (200, 1300)$ ، اندازه گام پیشروی برابر با  $\Delta S = 0/2$  و ضریب کشش  $\bar{\beta} = 1/01$  بدست آمده است. اطلاعات اولیه لازم جهت پیشروی معادلات PNS از نرم افزار BLUNT حاصل شده است. برای سنخیت داشتن این اطلاعات جهت پیشروی حل عددی توسط نرم افزار PNSAX، تعداد نقاط در جهت عمود بر سطح  $J_{max} = 200$ ، اندازه گام پیشروی  $\Delta S = 0/1$  و ضریب کشش  $\bar{\beta} = 1/01$  انتخاب شده است [۱۱]. با این وجود، با استفاده از درونیابی، اطلاعات اولیه را برای هر تعداد نقاط شبکه و ضریب کشش می توان بدست آورد. برای بررسی بیشتر، علاوه بر نتایج عددی و تجربی ذکر شده، نتایج عددی جریان ماوراءصوت روی مخروط نوک تیز با  $\theta_c = 7^\circ$  و  $M_\infty = 8$  نیز ارائه شده است. این نتایج شامل فشار روی سطح مخروط  $(p/p_\infty = 2/6025)$  و شیب شوک  $(\delta = 10/2965^\circ)$  می باشد. در شکل ۴، نتایج نرم افزار PNSAX برای شبکه ایجاددی، توزیع سرعت، شکل شوک و شیب شوک تا موقعیت  $S/R_N = 20$  روی مخروط سرپخ



حرارت شامل یک نقطه بازیاب<sup>(۱)</sup> می باشند. جهت بررسی نقش عبارات میرایی در نتایج ختاصل، منحنیهای فشار و درجه حرارت سطح بازاء مقادیر مختلف عبارت میرایی ارائه شده است. مشاهده می شود که افزایش عبارت میرایی چندانی روی منحنی فشار سطح ندارد ولی سبب از دیاد درجه حرارت سطح به ویژه بعد از موقعیت نقطه بازیاب می شود. بنابراین، شبه سازی عددی جریان توسط معادلات PNS باید با حداقل عبارت میرایی ممکن انجام شود. در جدول ۲، نتایج ضرایب آیرودینامیکی حاصل از نرم افزار PNSAX با نتایج عددی حل جریان غیرلزج به روش پیشرو [۱۲] و نتایج کد مهندسی سریع مقایسه شده است. نتایج حاصل برای پسای موجی از دقت خوبی برخوردار است ولی پسای اصطکاکی توام با خطا می باشد. دلیل خطا، در مغشوش بودن جریان است که با اصلاح و اضافه نمودن مدل های آشفتگی، نتایج مطلوب بدست خواهد آمد.

جدول ۲: ضرائب آئرو دینامیکی اجایو سربخ.

ضرائب	PNS	EULER	کد مهندسی
پسای موجی	۰/۰۵۳۷	۰/۰۵۴۰	۰/۰۵۶۸
پسای اصطکاکی	۰/۰۰۷۴	-	۰/۰۷۱۵

### نتیجه گیری

در این تحقیق، شبه سازی عددی جریان تقارن محوری، دائم، لزج و مافوق صوت با استفاده از معادلات ناویر-استوکس سهموی شده (PNS) صورت گرفته است. مقایسه نتایج حاضر با نتایج عددی و تجربی معتبر، نشان دهنده دقت و کارایی نرم افزار PNSAX می باشد. سرعت بالای محاسباتی، حافظه کم کامپیوتری و دقت مناسب نتایج، از مزایای اساسی معادلات PNS در مقایسه با معادلات TLNS می باشند.

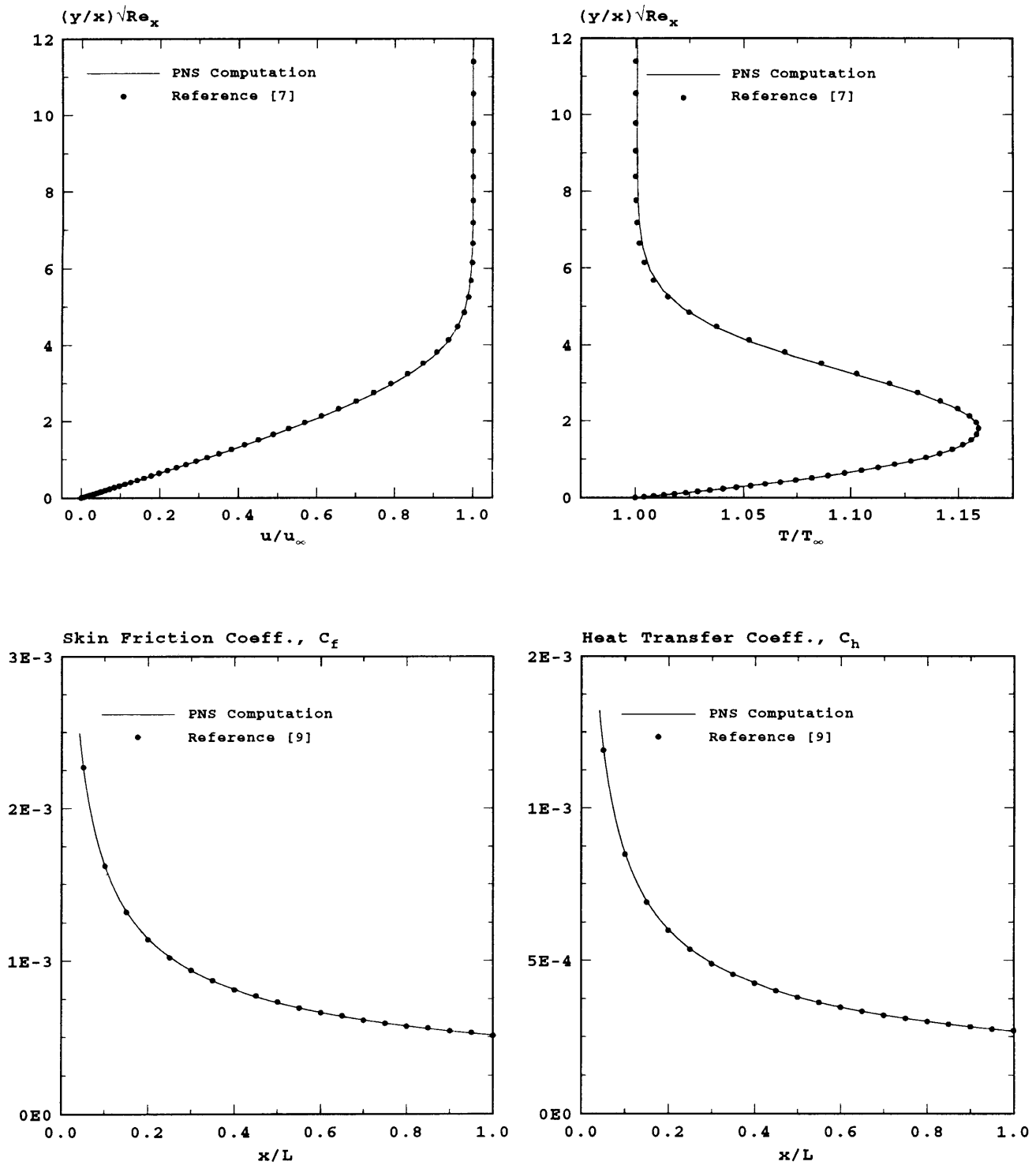
### قدردانی

این تحقیق طرح پژوهشی دانشگاه تهران می باشد. نگارندگان از دانشگاه تهران و صنایع شهید باقری، به خاطر در اختیار نهادن کلیه امکانات لازم و مساعدتهای بی شائبه، کمال تشکر می نمایند.

برگشتی خواهد بود و در پایین دست جریان به مقدار فشار مخروط نوک تیز معادل میل می کند. در حالت کلی، تغییرات فشار روی سطح، تابعی از  $M_\infty$ ،  $\theta_c$  و  $S/R_N$  می باشد. منحنی تغییرات درجه حرارت روی سطح مخروط سرپخ نشان می دهد که نتایج عددی با نتایج تجربی اختلاف دارد. وجود اختلاف به این دلیل است که شرط دیواره آدیاباتیکی، تقریب مناسبی برای شرط مرزی سطح در آزمایش نمی باشد. استتسون، درجه حرارت دیواره را درجه حرارت تعادل در نظر گرفت که در نزدیکی درجه حرارت آدیاباتیکی می باشد. در حقیقت، با در نظر گرفتن شرط دیواره معادل با ۸۵ درصد شرط آدیاباتیکی، نتایج واقعی حاصل می شود. نکته مهم این که خطا در تغییرات درجه حرارت، تاثیر چندانی در مشخصات جریان بخصوص فشار نخواهد داشت. در شکل ۹، نتایج نرم افزار PNSAX برای توزیع سرعت، دانسیته، فشار و درجه حرارت، در جهت عمود بر سطح مخروط سرپخ در موقعیتهای مختلف تا  $S/R_N = ۲۵۰$  ارائه شده تا نحوه تغییرات مشخصات میدان جریان بیشتر مشهود باشد.

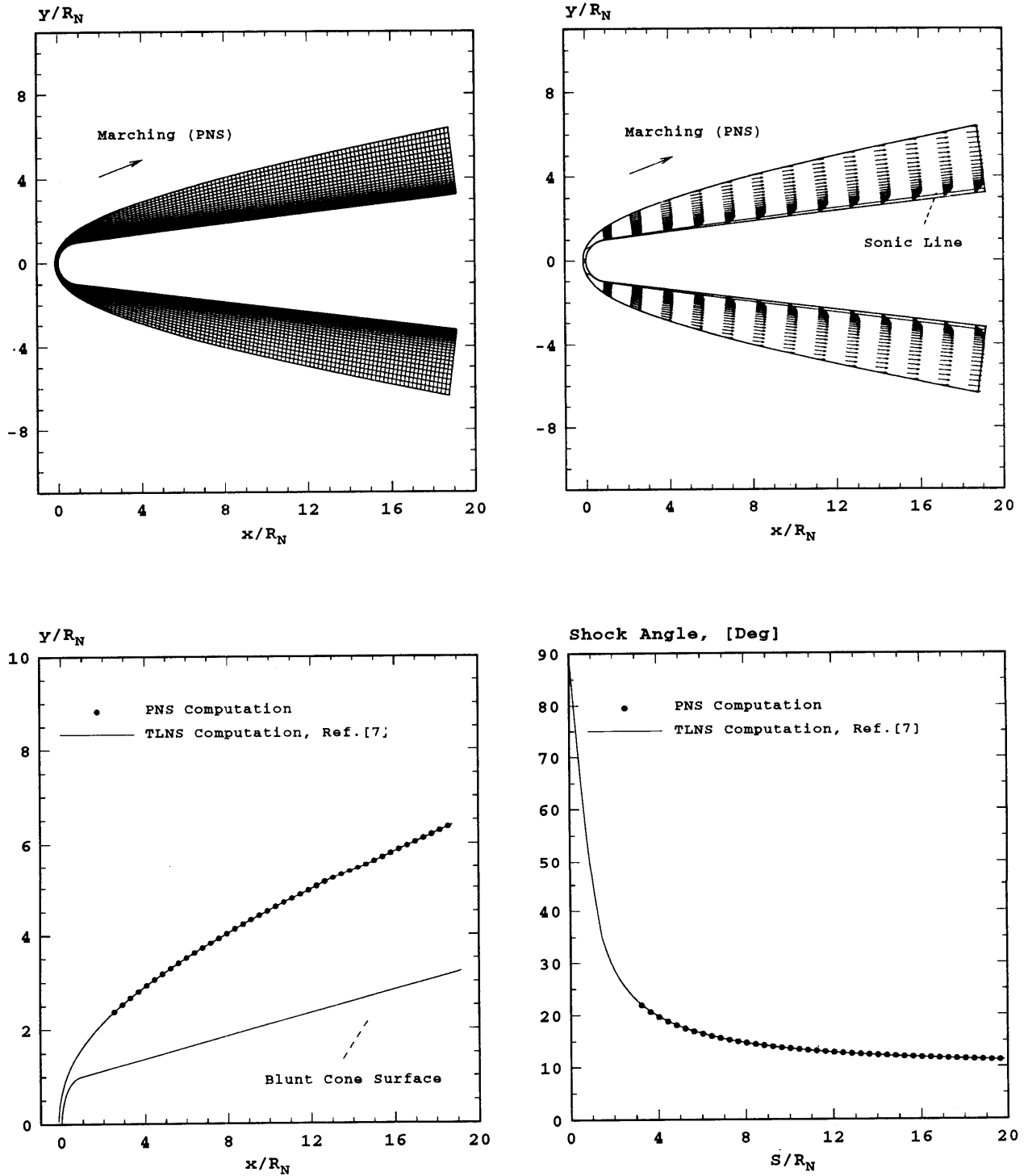
### شبه سازی عددی جریان مافوق صوت روی اجایو سربخ

برای نشان دادن قابلیت نرم افزار PNSAX، نتایج این نرم افزار برای جریان مافوق صوت روی یک اجایو سرپخ با دیواره آدیاباتیکی،  $L/D = ۴$ ،  $R_N = ۱$  cm،  $M_\infty = ۳/۵$ ،  $Re_\infty = ۲/۲ \times ۱۰^۵$  و  $T_\infty = ۲۸۸^\circ K$  ارائه شده است [۱۱]. در شکل ۱۰، نتایج نرم افزار PNSAX برای شبکه ایجاد، تغییرات شیب شوک، توزیع فشار و درجه حرارت سطح تا موقعیت  $S/R_N = ۷۵۰$  روی اجایو سرپخ ارائه شده است. ایجاد شبکه در هر مرحله از پیشروی، با استفاده از برازش شوک صورت گرفته است. به دلیل افزایش فاصله مابین دیواره و مرز شوک، باید در انتخاب تعداد نقاط شبکه و ضریب کشش دقت کرد. در این شبه سازی، تعداد نقاط شبکه در جهت عمود بر سطح  $J_{max} = ۱۰۰$  و ضریب کشش برابر با  $\bar{\beta} = ۱/۰۰۰۰۰۵$  انتخاب شده است. در طی فرایند پیشروی، اندازه گام پیشروی ثابت و برابر با  $\Delta S = ۰/۱$  در نظر گرفته شده است. با بررسی منحنی ها، مشخص می شود که منحنی تغییرات شیب شوک و فشار شامل یک نقطه برگشتی و منحنی تغییرات فشار و درجه

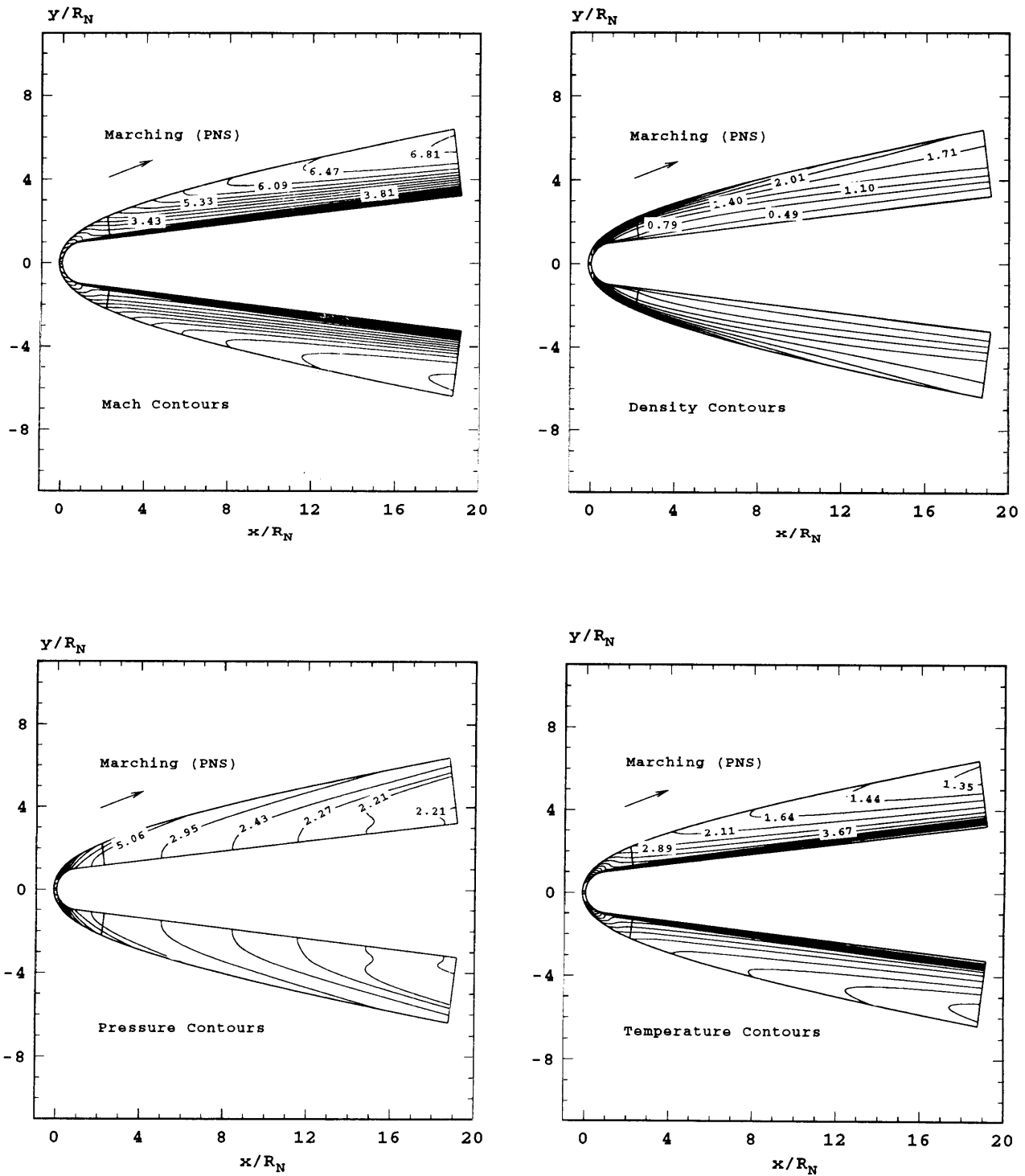


شکل ۳: مقایسه منحنی توزیع سرعت، درجه حرارت و منحنی تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای و ضریب انتقال حرارت سطح

برای جریان مافوق صوت روی صفحه تخت با  $M_\infty = 2$ ،  $Re_\infty = 1/65 \times 10^6$ .

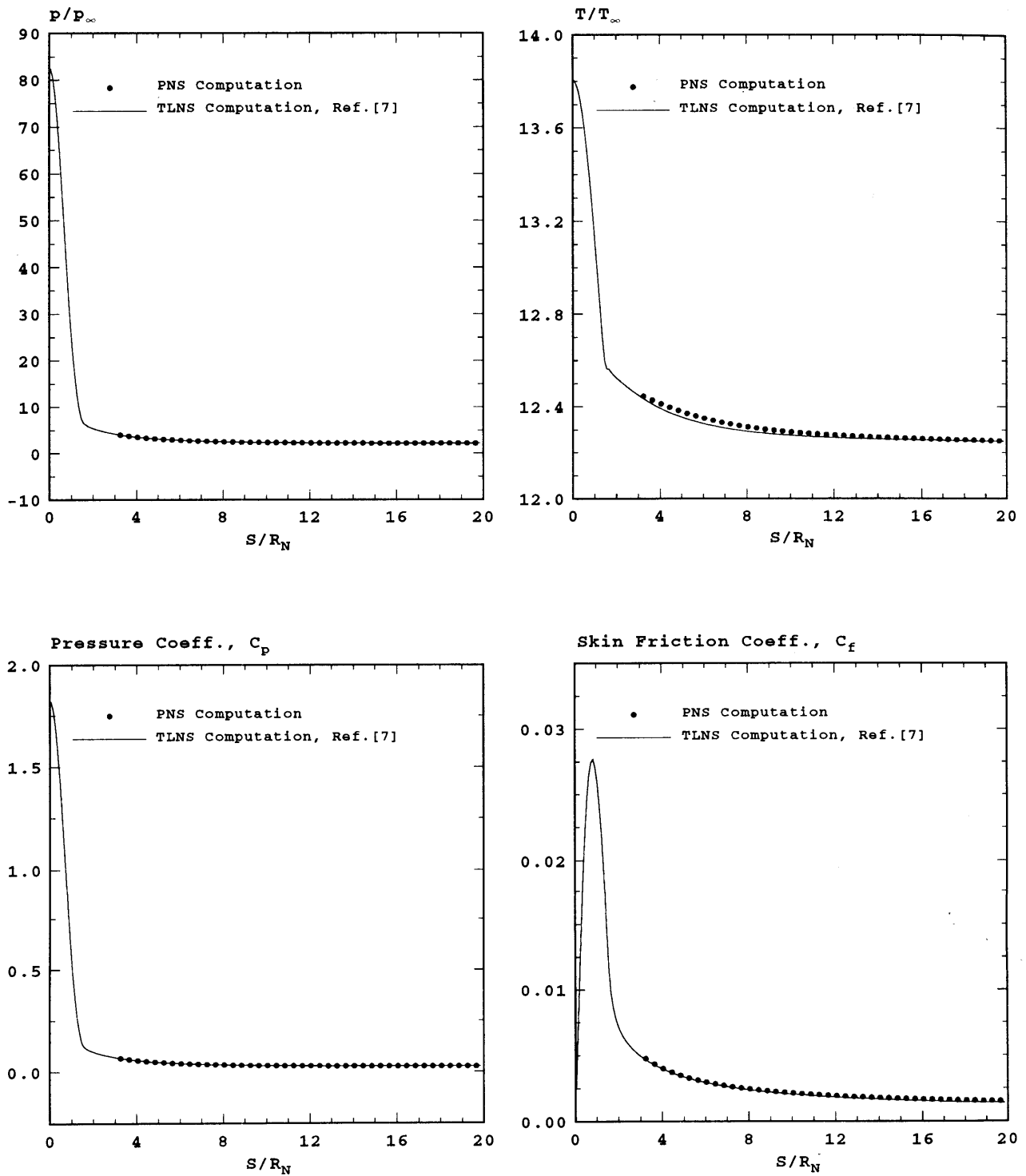


شکل ۴: شبکه ایجادی، میدان سرعت و مقایسه منحنی تغییرات موقعیت شوک و شیب شوک برای جریان ماوراءصوت روی مخروط سرخ  $7^\circ$  با دیواره آدیابایت،  $M_\infty = 8$  و  $Re_\infty = 31250$  تا موقعیت  $S/R_N = 20$ .

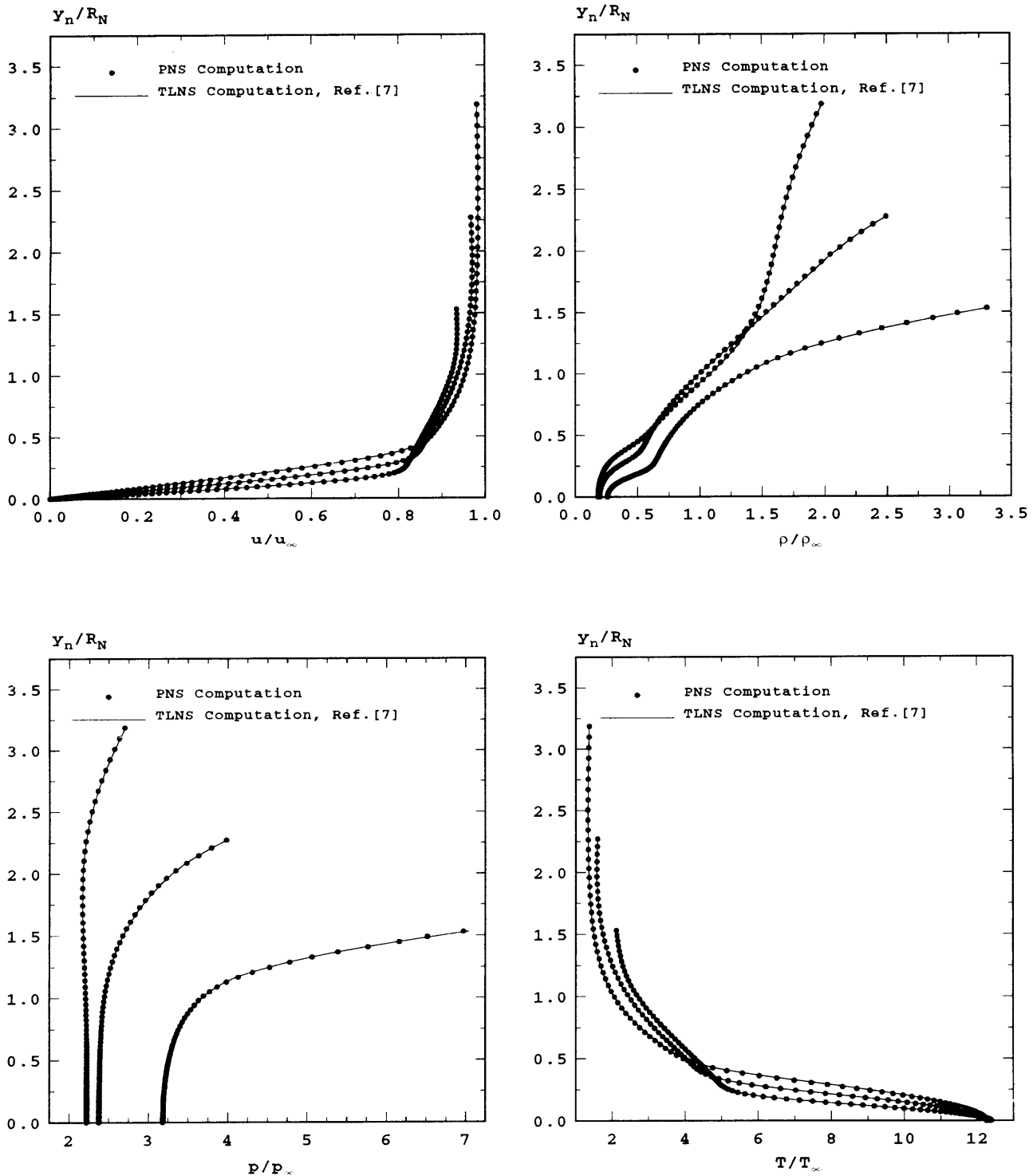


شکل ۵: خطوط همتراز عدد ماخ، دانسیته، فشار و درجه حرارت برای جریان ماوراءصوت روی مخروط سرخ  $7^\circ$  با دیواره آدیاباتیک،

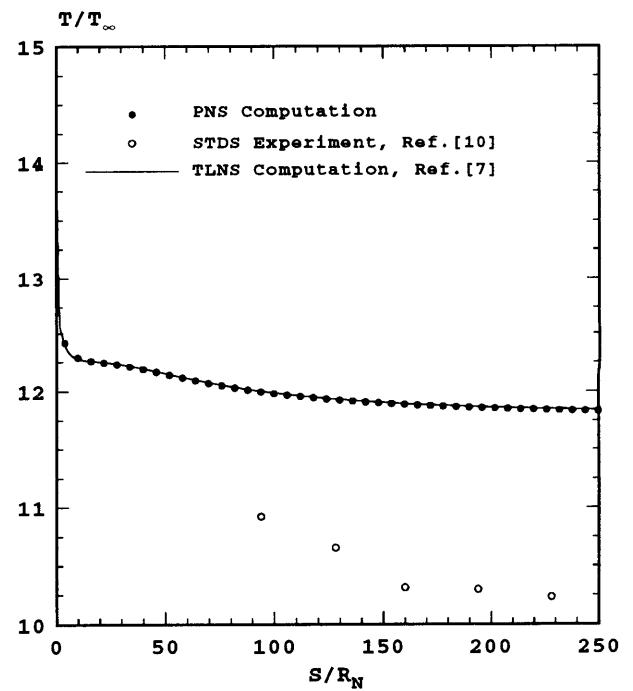
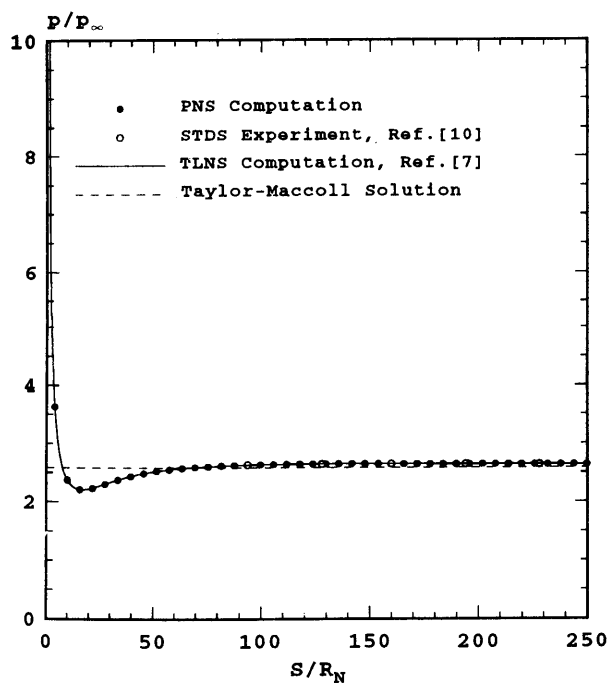
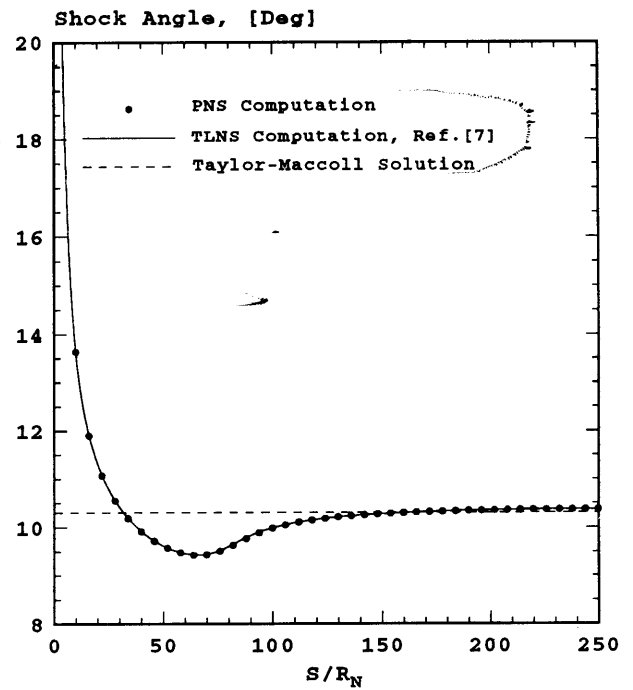
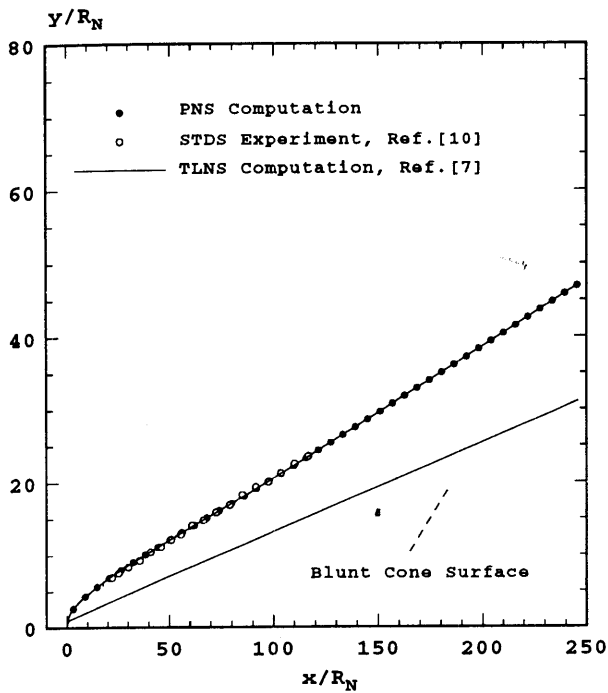
$$S/R_N = 20 \text{ تا موقعیت } Re_\infty = 31250 \text{ و } M_\infty = 8$$



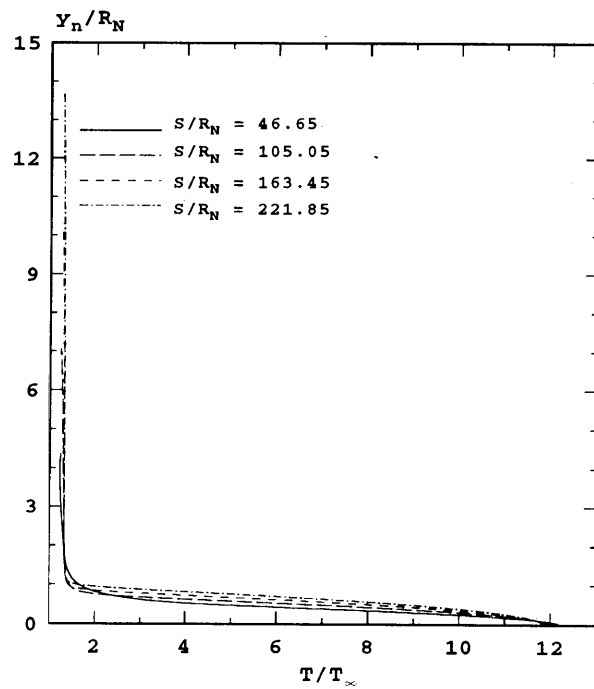
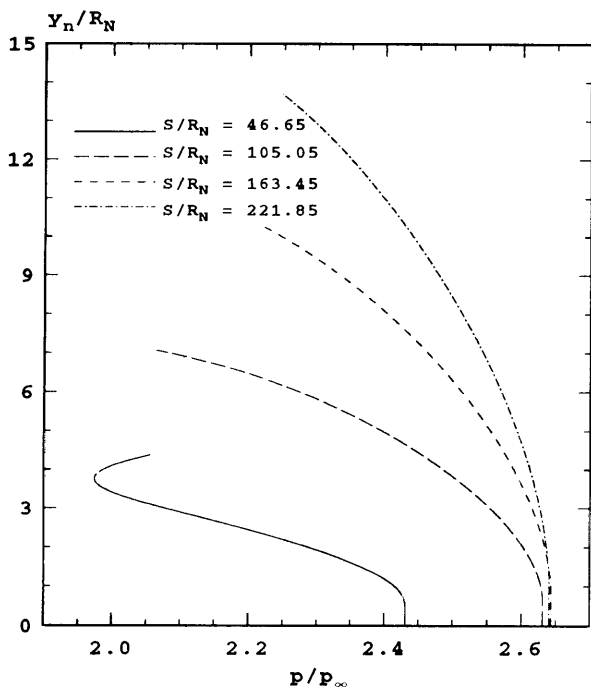
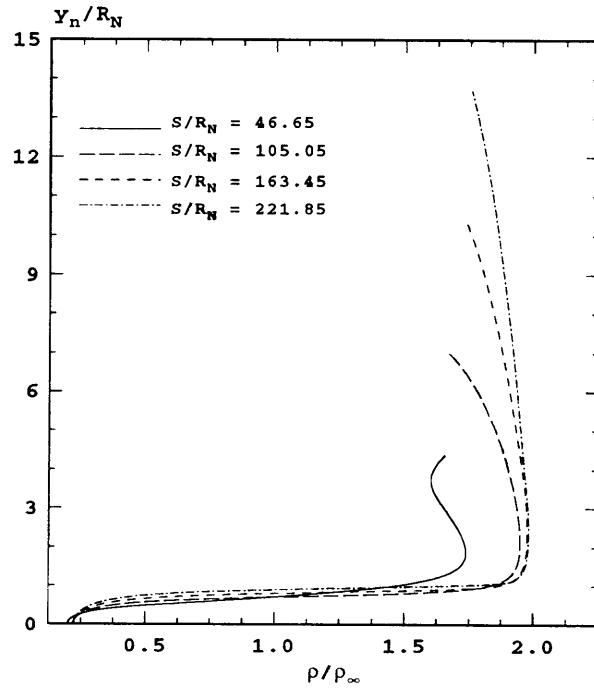
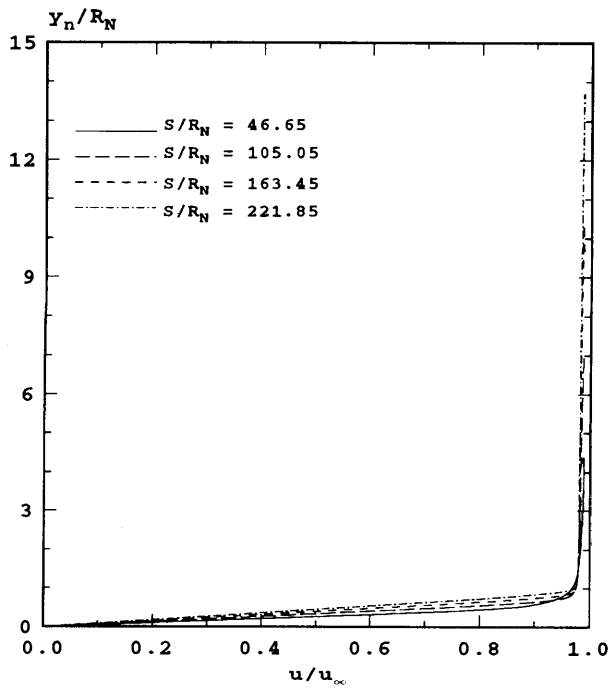
شکل ۶: مقایسه منحنی تغییرات فشار، درجه حرارت، ضریب فشار و ضریب اصطکاک پوسته ای سطح برای جریان ماوراء صوت روی مخروط سریع  $7^\circ$  با دیواره آدیاباتیک،  $M_\infty = 8$  و  $Re_\infty = 31250$  تا موقعیت  $S/R_N = 20$ .



شکل ۷: مقایسه منحنی توزیع سرعت، دانسیته، فشار و درجه حرارت برای جریان ماوراءصوت روی مخروط سریخ  $7^\circ$  با دیواره آدیاباتیک،  $M_\infty = 8$  و  $Re_\infty = 31250$  در موقعیتهای  $S/R_N = 4/85, 9/85, 19/85$

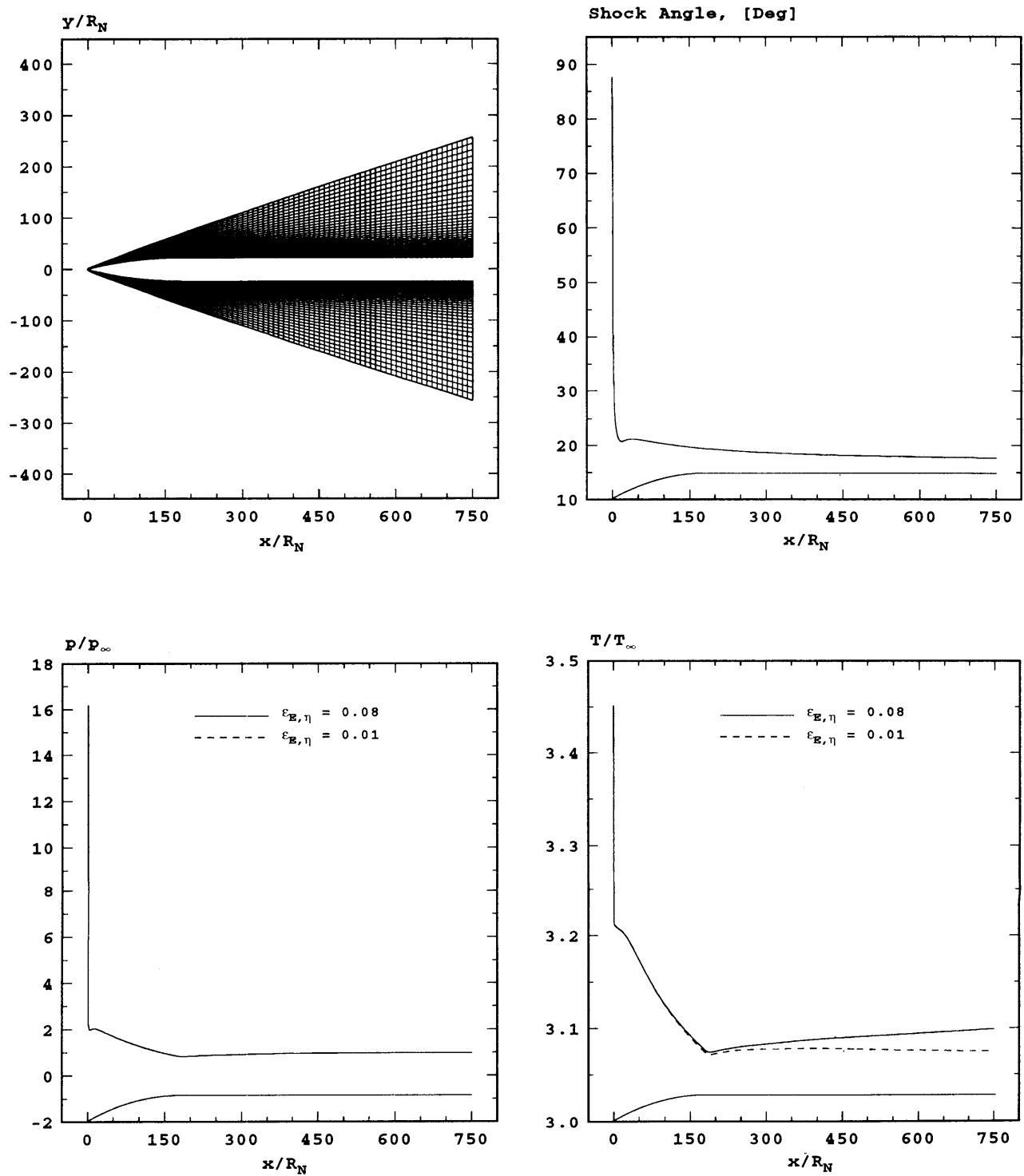


شکل ۸: مقایسه منحنی تغییرات موقعیت شوک، شیب شوک، فشار و درجه حرارت سطح برای جریان ماوراءصوت روی مخروط سرخ  $7^\circ$  با دیواره آدیاباتیک،  $M_\infty = 8$  و  $Re_\infty = 31250$  تا موقعیت  $S/R_N = 250$ .



شکل ۹: منحنی توزیع سرعت، دانسیته، فشار و درجه حرارت برای جریان ماوراءصوت روی مخروط سربخ  $7^\circ$  با دیواره آدیاباتیک،  $Re_{\infty} = 31250$  و  $M_{\infty} = 8$  در موقعیتهای مختلف.





شکل ۱۰: شبکه ایجادی، منحنی تغییرات شیب شوک، توزیع فشار و درجه حرارت سطح برای جریان مافوق صوت روی اجایو سرخ با دیواره آدیاباتیک،  $L/D = 4$ ،  $M_\infty = 3/5$  و  $Re_\infty = 2/2 \times 10^5$  تا موقعیت  $S/R_N = 750$ .

## مراجع

- 1 - Anderson, D. A., Tannehill, J. C., and Pletcher, R. H., (1984). "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer." McGraw Hill Book Company, New York.
- 2 - Rubin, S. G., (1981). "A Review of Marching Procedures for Parabolized Navier-Stokes Equations." *Presented at Symposium on Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows*, California State University at Long Beach.
- 3 - Cline, D. D. and Carey, G. F., (1989). "Conflicting Stepsize Requirements for Stable PNS Computations." *ALAA*, 89-0445.
- 4 - Schiff, L. B. and Steger, J. L., (1980). "Numerical Simulation of Steady Supersonic Viscous Flow." *ALAA Journal*, 18(12), 1421-1430.
- 5 - Vigneron, Y. C., Rakich, J. V. and Tannehill, J. C., (1978). "Calculation of Supersonic Viscous Flow Over Delta Wings with Sharp Subsonic Leading Edges." *ALAA*, 78-1137.
- 6 - Beam, R. M. and Warming R. F., (1978). "An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations." *ALAA Journal*, 16(4), 393-402.
- 7 - Esfahanian, V., (1991). "Computation and Stability Analysis of Laminar Flow Over a Blunted Cone in Hypersonic Flow." Ph.D. Thesis, The Ohio State University, Columbus, Ohio.
- 8 - Rizk, Y. M., Chaussee, D. S., McRae, D. S., (1981). "Computation of Hypersonic Viscous Flow Around Three-Dimensional Bodies at High Angles of Attack." *ALAA*, 82-1261.
- 9 - Morrison, J. H. and Korte, J. J., (1992). "Implementation of Vigneron's Streamwise Pressure Gradient Approximation in the PNS Equations." *ALAA*, 92-0189.
- 10 - Stetson, K. F., Thompson, E. R., Donaldson, J. C. and Siler, L. G., (1984). "Laminar Boundary Layer Stability Experiments on a Cone at Mach 8, Part 2 : Blunt Cone." *ALAA*, 84-0006.
- ۱۱ - اصفهانیان، و. و هجران‌فر، ک. "شبیه‌سازی عددی جریان تقارن محوری، دائم، لزج و مافوق صوت با استفاده از معادلات سهموی شده ناویر-استوکس (PNS)،" کنفرانس دینامیک شاره‌ها، سال چهارم، ص ۱۴۶-۱۲۹، مهرماه (۱۳۷۵).
- ۱۲ - اصفهانیان، و. و الوانکاریان، ج.، "شبیه‌سازی جریان مافوق صوت دائم با تقارن محوری، با استفاده از معادلات اوایلر به روش عددی پیشرو،" بیک هوافضا، سال سوم، شماره نهم، ص ۱۶-۱۲، پاییز (۱۳۷۵).

## واژه نامه

1 - Full Navier-Stokes	ناویر-استوکس
2 - Thin-Layer Navier-Stokes	لایه نازک ناویر-استوکس
3 - Parabolized Navier-Stokes	استوکس سهموی شده ناویر-
4 - Departure Solution	غیرواقعی و انحرافی
5 - Sublayer	زیر لایه ای
6 - Vigneron	ویگنرون
7 - Contravariant Velocity	سرعت پادوردا
8 - Sutherland	رابطه سادرلند
9 - Beam-Warming	بیم-وارمینگ
10 - Shock Capturing	تسخیر شوک
11 - Shock Fitting	برازش شوک
12 - Rankine Hugoniot	رانکین هوگونیت
13 - Inflection Point	نقطه برگشتی
14 - Recovery Point	نقطه بازیاب