

فرمول سازی تغییر شکل های بزرگ در قابهای فضایی

رضا عطارنژاد

استادیار گروه مهندسی عمران - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۷۳/۱۲/۲۱، تاریخ تصویب ۷۶/۸/۲۴)

چکیده

در تحلیل قابهای فضایی پس از تشکیل ماتریس سختی عضو در دستگاه مختصات محلی با استفاده از ماتریسهای دوران، این ماتریس سختی به دستگاه مختصات عمومی منتقل می شود و عمل سوار کردن ماتریس سختی در دستگاه مختصات کلی انجام می گیرد، ماتریس سختی شامل دو بخش سختی خطی و سختی غیرخطی می باشد. در تغییرشکلهای بزرگ غیر از ماتریس سختی که بطور پیوسته در حال تغییر است، ماتریسهای دوران که برای انتقال از دستگاه مختصات محلی به عمومی مورد استفاده قرار می گیرند نیز بطور دائم تغییر می کنند. در تعبیری از فرمول سازی لاگرانژین موضعی که در این مقاله بکار گرفته شده است معادله های شیب افت در موقعیت تغییر شکل یافته مورد استفاده قرار می گیرند. با تعریف مناسب حالت تغییرشکل یافته عضو در هر تکرار، ماتریس های انتقال با تلاش محاسباتی اندکی بدست می آیند و ماتریس سختی به سرعت اصلاح^(۱) می شود. به این ترتیب بردار نیروهای باقیمانده به سادگی محاسبه می شود که این امر توانایی روش را در ترکیب با سایر الگوهای محاسبات غیرخطی (تحلیل پایداری و تحلیل دینامیکی) بسیار بالا می برد.

کلید واژه ها: قاب فضایی، تحلیل غیرخطی هندسی، تغییرشکل های بزرگ، فرمول سازی لاگرانژین موضعی

مقدمه

موضعی^(۷) می باشد. هر دو این روشها در عمل با موفقیت بکار گرفته شده اند. توانایی فرمول سازی و تحلیل قابهای فضایی با تغییر شکلهای بزرگ از اهمیت بسیاری برخوردار است. در فرمول سازی ارائه شده در مدارک فنی کمتر به روش های حل بسته^(۸) پرداخته شده و این عدم استفاده سبب شده است که روشهای ارائه شده بدلیل نیاز به ظرفیت محاسباتی بسیار بالا و زمان طولانی تحلیل که ناشی از تحلیل های عملی قاب های فضایی غیرقابل استفاده سازد و به همین دلیل اکثریت قریب به اتفاق فرمول سازی ها در قاب های مسطح توسعه داده شده اند. [۹، ۸، ۶، ۲، ۱]. در هریک از این فرمول سازی ها بسته به نوع مسئله فرضیات ساده کننده ای در نظر گرفته شده و روش های مختلفی برای مدل کردن رفتار غیرخطی هندسی قاب ها پیشنهاد شده است. در بسیاری موارد تغییر شکل های بزرگ

در فرمول سازی رفتار غیرخطی هندسی سازه ها اگر تغییر مکانها به اندازه ای کوچک باشند که هندسه سازه تغییر نکند، روابط تعادل در هیئت تغییرشکل نیافته سازه^(۲) با دقت خوبی این روابط را در هیئت تغییرشکل نیافته^(۳) تقریب می کنند و به این ترتیب با فرض تغییر مکانهای کوچک می توان با استفاده از جمله های درجه دوم که در عبارت کرنش ظاهر میشوند به نوعی تحلیل غیرخطی هندسی مبادرت ورزید که در بسیاری مسائل پاسخ مناسبی با دقت کافی فراهم میسازد. با این همه در حالت تغییرشکل ها و چرخش های بزرگ^(۴) فرض ثابت ماندن هندسه حتی بطور تقریبی نیز صادق نخواهد بود و رابطه های تعادل در هر موقعیتی باید نسبت به موقعیت مرجع یا اولیه^(۵) مورد بررسی قرار گیرند. روش معمول برای این منظور در مسائل سازه ای استفاده از فرمول سازی لاگرانژین کلی^(۶) یا فرمول سازی لاگرانژین

تعمیم آن به مسائل غیرخطی می باشد.

$$u_{\gamma} = u_{\gamma 1} + \frac{1}{EA} N_{\gamma}$$

$$v_{\gamma} = v_{\gamma 1} + \theta_{z1} l + \frac{1}{GA'_{y'}} Q_{y\gamma} + \frac{l^2}{2EI_z} M_{z\gamma} + \frac{l^3}{3EI_z} Q_{z\gamma} \quad \text{و}$$

$$\theta_{y\gamma} = \theta_{y1} + \frac{1}{EI_y} M_{y\gamma} - \frac{l^2}{2EI_y} Q_{z\gamma}$$

$$w_{\gamma} = w_{\gamma 1} + \theta_{z1} l - \frac{1}{GA'_{z'}} Q_{z\gamma} + \frac{l^2}{2EI_y} M_{y\gamma} + \frac{l^3}{3EI_z} Q_{z\gamma} \quad \text{و}$$

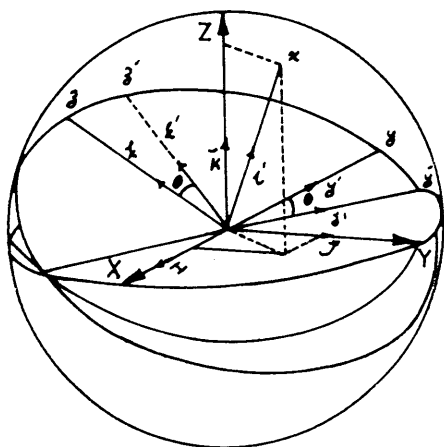
$$\theta_{z\gamma} = \theta_{z1} + \frac{1}{EI_z} M_{z\gamma} + \frac{l^2}{2EI_z} Q_{y\gamma}$$

$$\theta_{x\gamma} = \theta_{x1} + \frac{1}{GJ} M_{y\gamma}^T \quad (2)$$

در این رابطه ها \vec{A}_y و \vec{A}_z سطح مقطع اصلاح شده برای در نظر گرفتن اثر کرنش های برشی می باشند.

ماتریس سختی در دستگاه مختصات عمومی

فرض می کنیم XYZ دستگاه مختصات عمومی با بردارهای I, J, K، محور المان تیر و Y و Z محورهای اصلی المان و i, j, k بردارهای یکه آن باشند. فصل مشترک صفحه افقی XY و صفحه عمود بر تیر در مبدأ مختصات را Y' و عمود بر Y' در این صفحه (صفحه Y) را Z' می نامیم. اگر بین زاویه Y و Y' را θ بنامیم، بردارهای یکه i, j, k را می توان بر حسب I, J, K بصورت زیر نوشت:



شکل ۲: نمایش دوران دستگاه مختصات محلی و عمومی.

در واقع باعث ایجاد دورانهای نسبی بزرگ بین اعضاء می شوند، بدون اینکه زاویه چرخش گره ها بزرگ باشد و باتوجه به این امر در مقاله حاضر یک فرمول سازی برای تحلیل غیرخطی قاب های فضایی بر مبنای روش شیب افت ارائه می گردد که قابل اعمال در برنامه های استاندارد محاسبات ماتریسی می باشد. تعمیم فرمول سازی ارائه شده بر مبنای چرخش های بزرگ در گره ها و ملحوظ کردن اثر تغییر شکل های محوری نیز در دست مطالعه است که بزودی نسبت به انتشار نتایج آن اقدام خواهد شد.

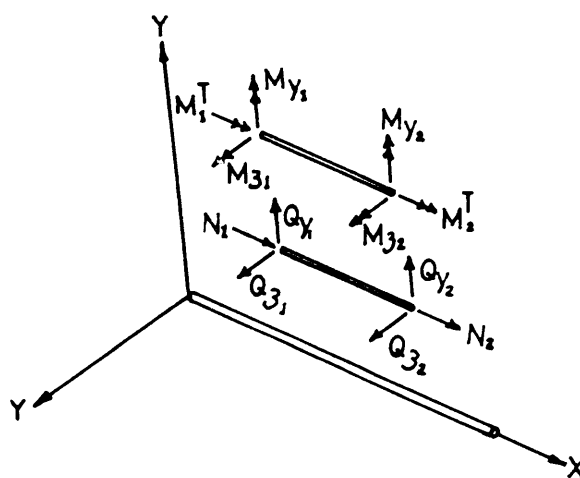
فرمول سازی خطی

ماتریس سختی در دستگاه مختصات محلی

رابطه بین تغییر مکانهای تعمیم یافته ابتدا و انتهای عضو بصورت زیر نوشته می شوند:

$$\delta_2 = \delta_1 + \omega_1 \Delta l i + \int_0^l d\delta + \int_0^l d\omega \Delta(l-x) i$$

$$\omega_2 = \omega_1 + d\int_0^l \omega \quad (1)$$



شکل ۱: نیروهای ابتدا و انتهای عضو.

در این روابط δ و ω برترتیب بردارهای تغییر مکان و چرخش مربوط به گره های ابتدا و انتهای تیر می باشند. ماتریس سختی المان در دستگاه مختصات محلی بصورت زیر در می آید. (به صفحه مقابل مراجعه شود) روشهای مختلفی برای بدست آوردن ماتریس سختی وجود دارد و در این مقاله از بسط رابطه ۱ با استفاده از تعادل بصورت زیر بدست آمده است و حسن آن قابلیت

$\frac{E_4}{I}$	$\frac{E_4}{I}$
.	$\frac{1\sqrt{E}GAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	.	$\frac{PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	$\frac{-1\sqrt{E}GAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	$\frac{-1\sqrt{E}GAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	$\frac{PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	$\frac{PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$
.	.	$\frac{1\sqrt{E}GAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	$\frac{-PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	.	$\frac{-PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	$\frac{1\sqrt{E}GAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	$\frac{1\sqrt{E}GAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.
.	.	.	$\frac{GI}{I}$.	.	.	$\frac{GI}{I}$.	.	.	$\frac{GI}{I}$.
.	.	.	$\frac{-PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	.	.	$\frac{PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	.	.	$\frac{PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.
.	$\frac{PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	.	$\frac{PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	$\frac{-PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	$\frac{-PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	$\frac{PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	$\frac{PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$
$\frac{-E_4}{I}$	$\frac{E_4}{I}$
.	$\frac{-1\sqrt{E}GAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	.	$\frac{-PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	$\frac{1\sqrt{E}GAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	$\frac{1\sqrt{E}GAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	$\frac{-PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	$\frac{-PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$
.	.	$\frac{-1\sqrt{E}GAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	$\frac{PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	.	$\frac{PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	$\frac{PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	$\frac{PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.
.	.	.	$\frac{GI}{I}$.	.	.	$\frac{GI}{I}$.	.	.	$\frac{GI}{I}$.
.	.	.	$\frac{-PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	.	.	$\frac{PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	.	.	$\frac{PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.
.	$\frac{PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	.	$\frac{PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	$\frac{-PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	$\frac{-PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	$\frac{PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$.	$\frac{PEGAJ_z}{\sqrt{1E I_z + GAJ_z^2}}$

فرمول سازی غیرخطی

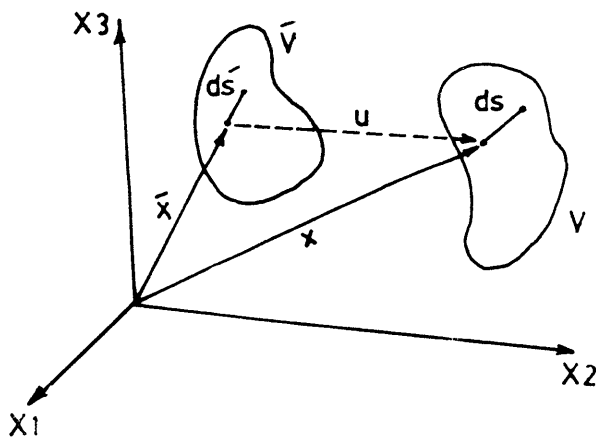
فرمول سازی تغییرشکل های بزرگ در تیرها [۵،۴]

اگر ds جزء طول در هیئت مرجع (\bar{v}) و ds جزء طول در هیئت تغییرشکل یافته (v) باشد، افزایش طول با عبارت:

$$ds^* - ds^* = \int E_{ij} dx_i dx_j \quad (۸)$$

بیان می شود که در آن E_{ij} تنسور کرنش گرین - لاگرانژ می باشد:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \quad (۹)$$



شکل ۳: نمایش تغییر شکل جزء طول ds.

با قبول فرض ناویه (Navier) و فرض کوچک بودن زوایای چرخش، تغییر مکانهای موازی با محور تیر نسبت به مرکز ثقل مقطع و تغییر مکانهای عرضی نسبت به مرکز برش تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} u &= u_c + z\theta_y + y\theta_z \\ v &= v_c - (z-e_z)\theta_x \\ w &= w_c + (y-e_y)\theta_x \end{aligned} \quad (۱۰)$$

در این روابط جهت مثبت تغییر مکان ها و دورانها جهت مثبت محورها در نظر گرفته شده است (شکل ۴). با بکارگیری معادله های (۹) و (۱۰) و صرف نظر کردن از جمله های درجه دوم نسبت به u و θ ، کرنش ها و از آنجا رابطه کار مجازی بدست خواهد آمد. رابطه کار مجازی را می توان به دوبخش خطی و غیرخطی تفکیک نمود:

$$\hat{i} = \frac{X}{D} \hat{I} + \frac{Y}{D} \hat{J} + \frac{Z}{D} \hat{K}$$

$$\hat{j} = -\frac{Y}{E} \hat{I} + \frac{X}{E} \hat{J}$$

$$\hat{k} = i \wedge j = -\frac{XZ}{DE} \hat{I} - \frac{YZ}{DE} \hat{J} + \left(\frac{X'}{DE} + \frac{Y'}{DE}\right) \hat{K} \quad (۳)$$

که در آن:

$$E = \sqrt{X'+Y'}, \quad D = \sqrt{X'+Y'+Z'}$$

تغییر مبنا بین دستگاه XYZ و XY'Z' بصورت زیر:

$$\begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X/D & Y/D & Z/D \\ -Y/E & X/E & \cdot \\ -XZ/DE & -YZ/DE & (X'+Y')/DE \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ J \\ K \end{bmatrix}$$

(۴)

و تغییر مبنا بین دستگاه XYZ و XY'Z' بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \cdot & \cos \theta & \sin \theta \\ \cdot & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i' \\ j' \\ k' \end{bmatrix}$$

(۵)

در نتیجه تغییر مبنا از XYZ به XY'Z' بصورت زیر نوشته خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X}{D} & \frac{Y}{D} & \frac{Z}{D} \\ \frac{-Y}{E} \cos \theta - \frac{XZ}{DE} \sin \theta & \frac{X}{E} \cos \theta - \frac{YZ}{DE} \sin \theta & \frac{X'+Y'}{DE} \sin \theta \\ \frac{Y}{E} \sin \theta - \frac{XZ}{DE} \cos \theta & \frac{-X}{E} \sin \theta - \frac{YZ}{DE} \cos \theta & \frac{X'+Y'}{DE} \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ J \\ K \end{bmatrix}$$

(۶)

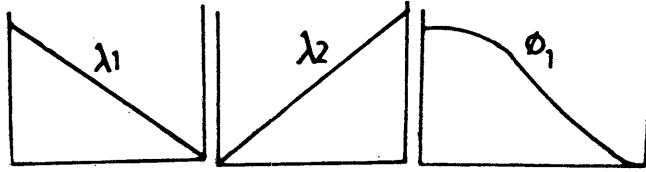
اگر این ماتریس را با T نشان دهیم عبارت ماتریس سختی در مختصات عمومی بصورت زیر خواهد بود:

$$K = \tau^T K \tau^T$$

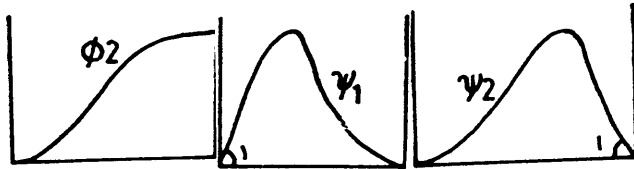
که در آن:

$$\tau = \begin{bmatrix} T & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & T & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & T & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & T \end{bmatrix}$$

(۷)



$$\lambda_1 = 1-\beta \quad \lambda_2 = \beta \quad \phi_1 = 1-3\beta^2+2\beta^3$$



$$\phi_2 = 3\beta^2 - 2\beta^3 \quad \psi_1 = \beta - 2\beta^2 + \beta^3 \quad \psi_2 = \beta^3 - \beta^2$$

شکل ۵: نمایش توابع هرمیتی و خطی.

که در آن:

$$\begin{aligned} \Lambda &= (\lambda_1, \lambda_2) \\ \dot{\Lambda} &= (\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2) = \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial \beta}, \frac{\partial \lambda_2}{\partial \beta} \right) \\ \Phi &= (\phi_1, \psi_1, \phi_2, \psi_2) \\ \hat{\Phi} &= (\phi_1, \psi_1, \phi_2, \psi_2) \\ \hat{\Phi} &= (\dot{\phi}_1, -\dot{\psi}_1, \dot{\phi}_2, -\dot{\psi}_2) \end{aligned} \quad (13)$$

به این ترتیب محاسبه δW_{NNL} منحصر به محاسبه انتگرال های ۸ گانه زیر خواهد شد:

$$I_1 = \int \hat{\phi}^T d\beta, \quad I_2 = \int \hat{\phi}^T \hat{\phi} d\beta, \quad I_3 = \int \hat{\phi}^T \Lambda d\beta, \quad I_4 = \int \beta \hat{\phi}^T \Lambda d\beta$$

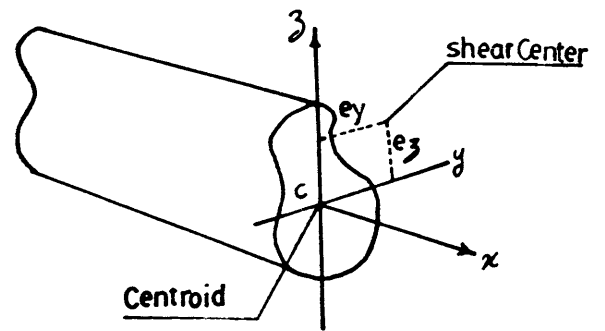
$$I_5 = \int \hat{\phi} \Lambda d\beta, \quad I_6 = \int \beta \hat{\phi} \Lambda d\beta, \quad I_7 = \int \hat{\phi}^T d\beta, \quad I_8 = \int \hat{\phi}^T \Lambda d\beta$$

(۱۴)

$$\delta W = \sigma_x \delta \epsilon_x + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}$$

$$\delta w_L = \sigma_x (\delta u_x + z \delta \theta_x - y \delta \theta_z) + \tau_{xy} [\delta v_x - \delta \theta_z - (z - e_z) \delta \theta_{xz}] + \tau_{xz} [\delta w_x + \delta \theta_y + (y - e_y) \delta \theta_{xz}]$$

$$\begin{aligned} \delta w_{NL} &= \sigma_x (v_{,x} \delta v_{,x} + w_{,x} \delta w_{,x} - (z - e_z) (\theta_{,x} \delta v_{,x} + v_{,x} \delta \theta_{,x})) \\ &+ (y - e_y) (\theta_{,x} \delta w_{,x} + w_{,x} \delta \theta_{,x}) + \tau_{xy} (w_{,x} \delta \theta_x + \theta_x \delta w_{,x}) \\ &- \tau_{xz} (v_{,x} \delta \theta_x + \theta_x \delta v_{,x}) \end{aligned} \quad (11)$$



شکل ۴: نمایش جهت مثبت حرکت ها و خروج از مرکزیت ها.

از بسط دادن بخش غیرخطی کار مجازی میتوان ماتریس سختی هندسی را بدست آورد. برای بسط عبارت کار مجازی، ابتدا با انتگرال گیری روی سطح مقطع، تنش های عمومی یا نیروها بدست می آیند و سپس انتگرال گیری روی طول عضو انجام می شود که منجر به بدست آمدن رابطه نیرو - تغییر مکان یا رابطه سختی غیرخطی خواهد شد. با معرفی پارامتر بدون بعد $\beta = \frac{X}{L}$ و استفاده از توابع خطی و هرمیتی برای تقریب تغییر مکان ها و دوران ها (شکل ۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} u_c &= \Lambda u_c \\ \theta_x &= \Lambda \theta_x \\ v_c &= \Phi v \\ w_c &= \Phi w \end{aligned} \quad (12)$$

$$\theta_y = \frac{-1}{I} \hat{\Phi} w$$

$$\theta_z = \frac{-1}{I} \hat{\Phi} v$$

مقدار این انتگرال ها پس از انجام عملیات لازم بصورت:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad I_4 = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -6 & -1 & 6 & 1 \\ -6 & 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$I_5 = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 26 & 2 & -26 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -26 & -2 & 26 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad I_6 = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -6 & 1 & 6 & -1 \\ -6 & -1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_7 = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -6 & -1 \\ -6 & -1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad I_8 = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(۱۵)

و از آنجا ماتریس سختی هندسی بصورت زیر بدست می آید:

$$I_9 = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 26 & -2 & -26 & -2 \\ -2 & 4 & 2 & -1 \\ -26 & 2 & 26 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad I_{10} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -6 & 1 \\ -6 & 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$\frac{2p \cdot \Delta V}{30 \cdot l}$		$\frac{e_2 \cdot \Delta V \cdot \Delta l_{y1}}{l}$		$\frac{r}{30} \cdot \Delta V$		$\frac{2p \cdot \Delta V}{30 \cdot l}$		$\frac{e_2 \cdot \Delta V \cdot \Delta l_{y1} \cdot Q_z}{l}$	$\frac{r}{30} \cdot \Delta V$
	$\frac{2p \cdot \Delta V}{30 \cdot l}$	$\frac{e_2 \cdot \Delta V + \Delta l_{z1}}{l}$	$\frac{r}{30} \cdot \Delta V$			$\frac{2p \cdot \Delta V}{30 \cdot l}$		$\frac{e_2 \cdot \Delta V + \Delta l_{z1} \cdot Q_y}{l}$	$\frac{r}{30} \cdot \Delta V$
	$\frac{e_2 \cdot \Delta V \cdot \Delta l_{y1}}{l}$	$\frac{e_2 \cdot \Delta V + \Delta l_{z1}}{l}$	$\frac{1}{p} Q_y \cdot l$	$\frac{1}{p} Q_z \cdot l$		$\frac{e_2 \cdot \Delta V \cdot \Delta l_{y1}}{l}$	$\frac{e_2 \cdot \Delta V + \Delta l_{z1}}{l}$		$\frac{1}{p} Q_y \cdot l$
	$\frac{r}{30} \cdot \Delta V$	$\frac{1}{p} Q_y \cdot l$	$\frac{r}{30} \cdot \Delta V$			$\frac{r}{30} \cdot \Delta V$	$\frac{1}{p} Q_y \cdot l$	$\frac{1}{p} Q_z \cdot l$	
$\frac{r}{30} \cdot \Delta V$		$\frac{1}{p} Q_z \cdot l$		$\frac{r}{30} \cdot \Delta V$		$\frac{r}{30} \cdot \Delta V$		$\frac{1}{p} Q_z \cdot l$	$\frac{1}{p} Q_y \cdot l$
$\frac{2p \cdot \Delta V}{30 \cdot l}$		$\frac{e_2 \cdot \Delta V \cdot \Delta l_{y1}}{l}$		$\frac{r}{30} \cdot \Delta V$		$\frac{2p \cdot \Delta V}{30 \cdot l}$		$\frac{e_2 \cdot \Delta V + \Delta l_{y1} \cdot Q_z}{l}$	$\frac{r}{30} \cdot \Delta V$
	$\frac{2p \cdot \Delta V}{30 \cdot l}$	$\frac{e_2 \cdot \Delta V + \Delta l_{z1}}{l}$	$\frac{r}{30} \cdot \Delta V$			$\frac{2p \cdot \Delta V}{30 \cdot l}$		$\frac{e_2 \cdot \Delta V \cdot \Delta l_{z1} + Q_y}{l}$	$\frac{r}{30} \cdot \Delta V$
$\frac{e_2 \cdot \Delta V \cdot \Delta l_{y1} \cdot Q_z}{l}$	$\frac{e_2 \cdot \Delta V + \Delta l_{z1} \cdot Q_y}{l}$		$\frac{1}{p} Q_y \cdot l$	$\frac{1}{p} Q_z \cdot l$		$\frac{e_2 \cdot \Delta V \cdot \Delta l_{y1} \cdot Q_z}{l}$	$\frac{e_2 \cdot \Delta V \cdot \Delta l_{z1} + Q_y}{l}$		$\frac{1}{p} Q_y \cdot l$
	$\frac{r}{30} \cdot \Delta V$	$\frac{1}{p} Q_y \cdot l$	$\frac{r}{30} \cdot \Delta V$			$\frac{r}{30} \cdot \Delta V$	$\frac{1}{p} Q_y \cdot l$	$\frac{r}{30} \cdot \Delta V$	
$\frac{r}{30} \cdot \Delta V$		$\frac{1}{p} Q_z \cdot l$		$\frac{r}{30} \cdot \Delta V$		$\frac{r}{30} \cdot \Delta V$		$\frac{1}{p} Q_z \cdot l$	$\frac{r}{30} \cdot \Delta V$

ماتریس سختی هندسی.

چرخش های بزرگ بدست خواهند آمد. چرخش های بزرگ ناشی از تغییر مکان های نسبی بزرگ بین گره های دو سر عضو می باشند و زاویه چرخش گره ها همچنان بسیار کوچک فرض می شود. برای بدست آوردن رابطه های

تغییر شکل های بزرگ (Large Displacements)

در این بخش رابطه های تعادل مربوط به موقعیت تغییر شکل یافته سازه با فرض تغییر شکل های بزرگ و

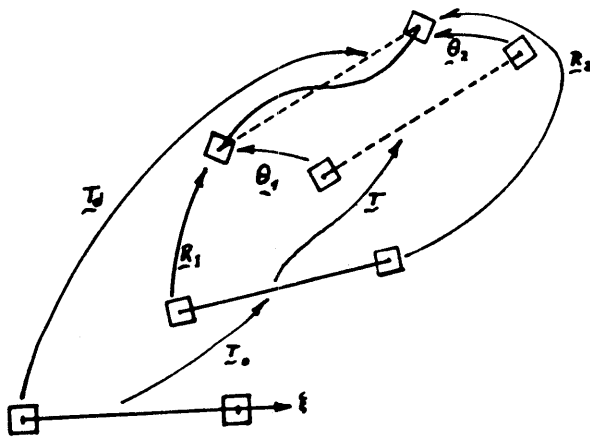
در این رابطه ها داریم :

$$\begin{aligned} C_{i1} &= \cos\beta_{i1}, \quad S_{i1} = \sin\beta_{i1} \\ C_{i2} &= \cos\beta_{i2}, \quad S_{i2} = \sin\beta_{i2}, \quad i=x,y,z \end{aligned} \quad (19)$$

و β_{x1} و β_{y1} و β_{z1} و β_{x2} و β_{y2} و β_{z2} زاویه در گره های ۱ و ۲ با محورهای عمومی مختصات می باشند که از بردار تغییر مکان تعمیم یافته بدست می آیند. از طرف دیگر ماتریس انتقال T که موقعیت اولیه عضو را به خط فرضی واصل بین دو گره بعد از تغییر مکان مرتبط می سازد (شکل ۶) از رابطه زیر بدست می آید:

$$T_d = T \cdot T_0 \quad \text{و} \quad T = T_d \cdot T_0^T \quad (20)$$

که در آن T_0 ماتریس دوران عضو در موقعیت اولیه نسبت به عضو مبنا می باشد.



شکل ۶: نمایش ماتریس انتقال T.

به این ترتیب ماتریس های دوران گره ها از موقعیت تغییر شکل یافته به خط فرضی واصل بین دو گره را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$\begin{aligned} R_1 &= \theta_1 \cdot T \quad \text{و} \quad R_2 = \theta_2 \cdot T \\ \theta_1 &= R_1 \cdot T^T \quad \text{و} \quad \theta_2 = R_2 \cdot T^T \end{aligned} \quad (21)$$

و با فرض کرنش های کوچک خواهیم داشت :

تعداد ابتدا بردار نیروهای داخلی سازه $(\phi(a))$ بر حسب تغییر مکانهای بزرگ محاسبه میشود. این نیروها را در مختصات محلی میتوان بصورت زیر بیان نمود:

$$N_2 = EA \frac{l'-1}{l}, \quad N_1 = -N_2 \quad (\text{محوری})$$

$$M_2^T = GJ(\theta_{x2} - \theta_{x1}), \quad M_1^T = -M_2^T \quad (\text{لنگریچشی})$$

$$M_{y1} = \frac{2EI_y}{l'}(2\theta_{y1} + \theta_{y2}), \quad M_{y2} = \frac{2EI_y}{l'}(2\theta_{y2} + \theta_{y1}) \quad (\text{لنگری Y})$$

$$M_{z1} = \frac{2EI_z}{l'}(2\theta_{z1} + \theta_{z2}), \quad M_{z2} = \frac{2EI_z}{l'}(2\theta_{z2} + \theta_{z1}) \quad (\text{لنگری Z})$$

$$Q_{y1} = \frac{(M_{y1} + M_{y2})}{l'}, \quad Q_{y2} = -Q_{y1} \quad (\text{برش Y})$$

$$Q_{z1} = \frac{(M_{z1} + M_{z2})}{l'}, \quad Q_{z2} = -Q_{z1} \quad (\text{برش Z}) \quad (16)$$

در این رابطه ها 1 و 1' بترتیب طول اولیه و طول تغییر شکل یافته عضو هستند.

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\ l' &= \sqrt{(x_2 + u_2 - (x_1 + u_1))^2 + (y_2 + v_2 - (y_1 + v_1))^2} \\ &\quad + (z_2 + w_2 - (z_1 + w_1))^2 \end{aligned} \quad (17)$$

بردارهای تغییر شکل

اگر ماتریس های دوران گره ها از موقعیت اولیه به موقعیت نهایی را با R_1 و R_2 نشان دهیم و در صورتیکه چرخشها خیلی بزرگ نباشند، ماتریس دوران کل را میتوان بصورت حاصلضرب ماتریس های دوران حول محورهای عمومی تعریف کرد:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \begin{bmatrix} \theta X_1 \\ \theta Y_1 \\ \theta Z_1 \end{bmatrix}, \quad \theta_2 = \begin{bmatrix} \theta X_2 \\ \theta Y_2 \\ \theta Z_2 \end{bmatrix} \\ R_i &= \begin{bmatrix} CZ_i & -SZ_i & 0 \\ SZ_i & CZ_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CY_i & 0 & SY_i \\ 0 & 1 & 0 \\ -SY_i & 0 & CY_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_{xi} & -S_{xi} \\ 0 & S_{xi} & C_{xi} \end{bmatrix} \\ &\quad , \quad i = 1 \text{ و } 2 \end{aligned} \quad (18)$$

فرمول سازی پیشنهادی مورد تحقیق قرار گرفته اند ارائه می شوند. همخوانی خوب نتایج با حل های تحلیلی و عددی نشان دهنده دقت و کارایی بالای این فرمول سازی می باشد.

$$\theta_i = \begin{bmatrix} 1 & \theta_{z_i} & \theta_{y_i} \\ \theta_{z_i} & 1 & \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} & \theta_{x_i} & 1 \end{bmatrix} \quad i=1,2 \quad (22)$$

که در مختصات محلی میتوان آنها را در رابطه های مربوط به محاسبه نیروهای انتهائی عضو (معادله ۱۶) بکار برد. بردار کل نیروهای داخلی از سوار کردن تمام بردارهای نیروی عضوها بدست می آید:

$$\phi(a) = \sum T_i \times F_i \quad (23)$$

پاسخ سازه را میتوان با فرآیند تکراری به شرح زیر بدست آورد:

- ۱- محاسبه ماتریس K در موقعیت اولیه و محاسبه بارکل f
- ۲- حل دستگاه $Ka=f$ و بدست آوردن تغییر مکانهای اولیه

۳- محاسبه بردار نیروی داخلی $\phi(a)$ و محاسبه بردار نیروی باقیمانده $\psi(a) = \phi(a) - f$

- ۴- محاسبه K در موقعیت تغییر شکل یافته
- ۵- حل دستگاه $K\Delta a_i = \psi(a)_i$

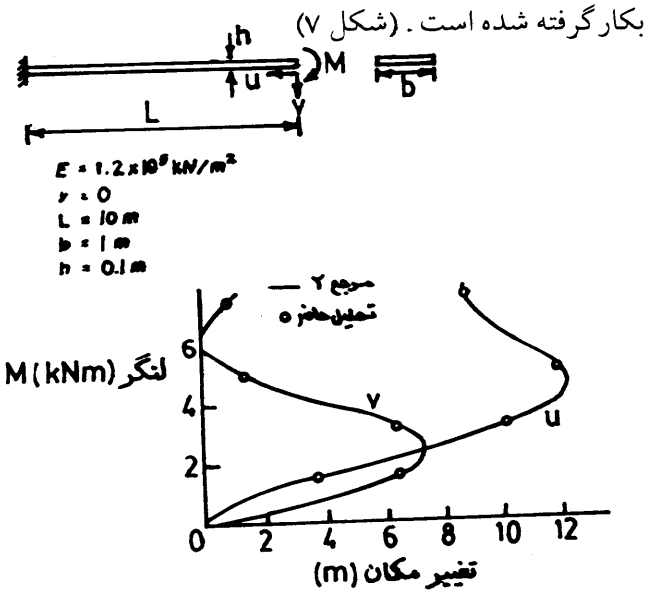
- ۶- افزایش تغییر مکانها $a_{i+1} = a_i + \Delta a_i$
- ۷- کنترل $No |\psi(a)| < \epsilon$ برگشت به ۳

| Yes

Stop

مثال ها

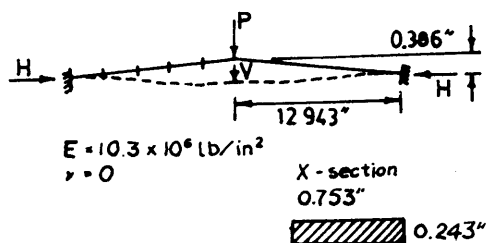
در این بخش چند مثال کلاسیک که توسط



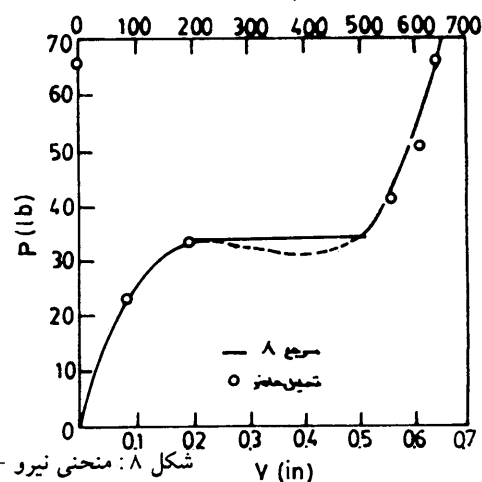
شکل ۷: تغییر مکان انتهای آزاد تیرکنسول با لنگر متمرکز انتهائی.

قاب ویلیامز

در این مثال قاب ویلیامز [۸] با مشخصات داده شده مورد تحلیل قرار گرفته است. هر عضو قاب به ۳ المان تقسیم شده است. (شکل ۸)

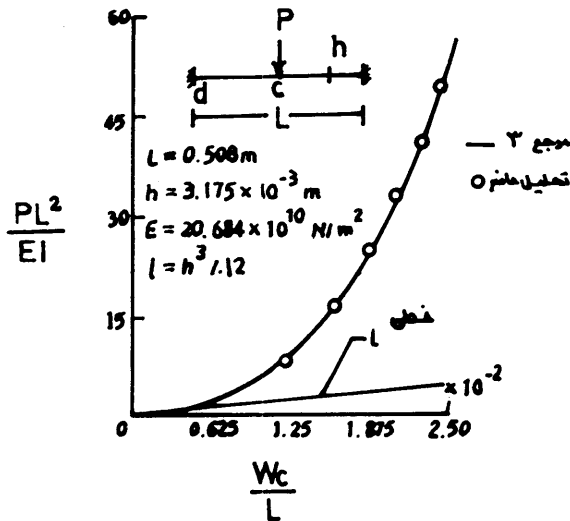


شکل ۸: منحنی نیرو - تغییر مکان برای قاب ویلیامز.



تیر دوسرگیردار

مثال دیگر تیر دوسرگیردار شکل ۱۱ [۳] می باشد که با ۴ المان برای تحلیل نصف تیر بکار گرفته شده و نتایج با جواب های موجود مقایسه شده اند.



شکل ۱۱: تیر دوسرگیردار، نمودار نیرو-تغییر مکان.

بطوریکه در مثالهای فوق نشان داده شده است، فرمول سازی ارائه شده در محدوده اعتبار خویش که شامل صرف نظر کردن از:

۱- دوران های بزرگ در گره ها

۲- اثر تغییرشکلهای محوری

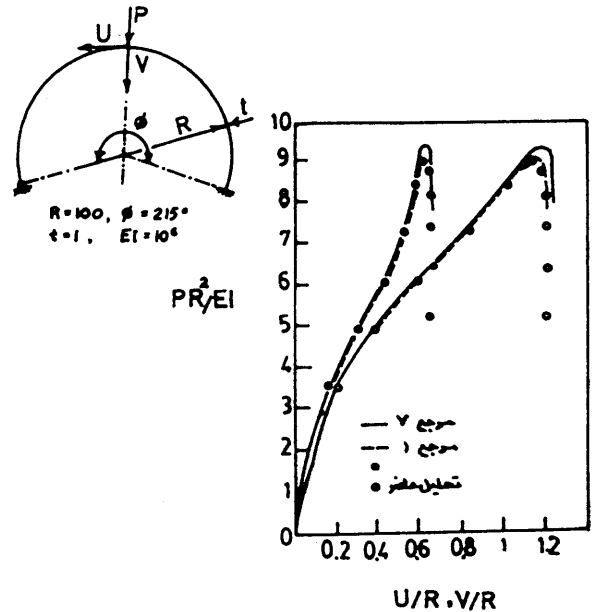
می باشد بسیار دقیق و کارآمد بوده و حتی در صورتیکه موارد فوق مورد نظر باشند. بطوریکه از مثال ۳-۴ برمی آید می توان با ریز کردن شبکه و افزایش تعداد المانها نتایج مناسبی بدست آورد.

خلاصه و نتیجه گیری

در این مقایسه رفتار غیرخطی هندسی قابهای فضائی با تغییرشکلهای بزرگ به منظور ارائه فرمول سازی مناسب برای تحلیل آنها مورد بررسی قرار گرفته است. در تعبیری از فرمول سازی لاگرانژین موضعی که در این نوشتار بکار گرفته شده است با جداسازی حرکات جسم صلب از تغییر مکانها و دورانهای بزرگ، اعضا در موقعیت تغییر مکان یافته با میدان کامل کرنش گرین - لاگرانژ بررسی شده و

قوس یک سرمفصل

بعنوان یک مثال دیگر، قوس یک سرمفصل یک سرگیردار شکل ۹ [۷] مورد تحلیل قرار گرفت تعداد المانهای بکار گرفته شده ۸۶ المان بوده است.

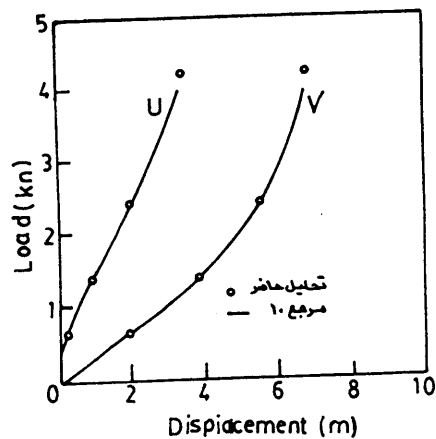
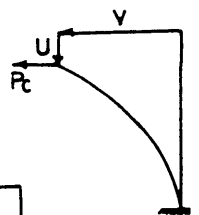


شکل ۹: قوس گیردار مفصلی تحت اثر بار متمرکز، نمودار نیرو-تغییر مکان.

تیر - ستون کنسول تحت اثر بار متمرکز

تیر ستون شکل ۱۰ با ۴ المان مورد تحلیل قرار گرفته و نتایج با جواب های موجود مقایسه شده اند. [۱۰].

$E=1.2 \text{ kn/mm}^2$
 $y=0$
 $L=10 \text{ m}$
 $b=1 \text{ m}$
 $h=0.1 \text{ m}$



شکل ۱۰: تیر ستون کنسول، نمودار نیرو-تغییر مکان.

بردار نیروهای باقیمانده و تحلیل غیرخطی ارائه گردیده است. دقت و کارایی روابط ارائه شده با اجرای چند مثال و مقایسه با نتایج موجود در ادبیات فنی نشان داده شده است.

شکل مناسب روابط شیب افت برای تحلیل آنها پیشنهاد شده است. ماتریس سختی هندسی عضو با استفاده از اصل کارهای مجازی و تفکیک آن به دو بخش خطی، غیرخطی بدست آمده و فرآیند ساده‌ای برای محاسبه

مراجع

- 1 - Wood, R. D. and Zienkiewicz, O. C. (1977). "Geometrically non linear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells". *Comp. Struct.*, 7.
- 2 - Hsiao, K. M. and Hou, F. Y. (1987). "Non linear finite element analysis of elastic frames". *Comp. Struct.*, 26.
- 3 - Akkoush, E., Toridis, T., Kbozeimeh, K. and Huang, H. K. (1978). "Bifurcation, pre-and post-buckling of framed structures". *Comp. Struct.*, 8.
- 4 - Malvern, L. E. "Introduction to the mechanics of a continuous medium".
- 5 - Fung, Y. C. "Foundation of solid mechanics".
- 6 - Yang, T. Y. (1973). "Matrix displacement solution to elastica problems of beams and frames". *Int J Solids Struct.*, 9, 829-842.
- 7 - Da Deppo, D. A. and Schmidt, R. (1975). "Instability of clamed hinged circular arches subjected to a point load". *Trans. ASME*, 894-869.
- 8 - Williams, F. W. (1964). "An approach to the nonlinear behaviour of the members of a rigid jointed plane framework with finite deflection". *Q. J. Mech. Appl. Maths.*, 17(4), 451-469.
- 9 - Chajes, A., Churchill, J. E. (1987). "Non-linear frame analysis by finite element method's". *Journal of the Struct. Div., ASCE*, 113, STG, June, 1221-1235.
- 10 - Horrignoe, G. and Bergan, P. G. (1978). "Nonlinear Analysis of free form shell by plat finite elements". *Comp. Math. Appl. Mech. Engng.*, 16.

واژه نامه

- | | |
|------------------------------------|----------------------------|
| 1 - Update | اصلاح شده |
| 2 - Undeformed configuration | هیئت تغییرشکل نیافته |
| 3 - deformed configuration | هیئت تغییرشکل یافته |
| 4 -Finite Rotations | چرخش های بزرگ |
| 5 -Reference Position | موقعیت مرجع |
| 6 - Total Lagrangian Formulation | فرمول سازی لاگرانژین کلی |
| 7 - Updated Lagrangian Formulation | فرمول سازی لاگرانژین موضعی |
| 8 - Closed form solution | حل بسته |