مدل کنترل موجودی دو سطحی اقلام فاسد شدنی با در نظر گرفتن اثرات تورم

فریبرز جولای
استادیار گروه مهندسی صنایع- دانشکده فنی - دانشگاه تهران
تورج اسودی
فارغ التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی صنایع- دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(تاریخ دریافت ۸۱/۱۰/۱۴ ، تاریخ تصویب ۸۲/۸/۱۲)

چکیده

این مقاله به ارائه مدلی برای تعیین میزان سفارش اقتصادی در سیستمهای دو سطحی در شرایط تورمی و با هدف دستیابی به حداکثر سود می‌پردازد. فرض شده است که اقلام نگهداری شده از نوع فاسد شدنی با تقاضای ثابت بوده و دارای عمر تصادفی وابسته به زمان می‌باشند. همچنین کمبود مجاز نبوده و امکان نرخ هزینه‌های نگهداری متفاوت در هر دو سطح وجود دارد. دو حالت فاسد شدن اقلام در سطح اوّل و فاسد شدن اقلام در سطح دوّم در نظر گرفته شده و برای هر حالت مقادیر سفارش بهینه تعیین و طریقه حل با ارایه یک مثال عددی تشریح شده است.

واژه‌های کلیدی: کنترل موجودی، اقلام فاسد شدنی، سیستم دو سطحی، تورم.

مقدّمه

از اصلی‌ترین فرضیات در مدل‌های کلاسیک تعیین اندازه انباشته اقتصادی، ثابت در نظر گرفتن هزینه‌های سیستم می‌باشد. امروزه با توجه به وجود نرخ تورم بالا در اکثر کشورها، به ویژه کشورهای آسیایی، دخالت دادن آن در مدل‌سازی ضروری می‌باشد.

در دنیای واقعی، سیستم‌های موجودی زیادی یافت می‌شوند که اقلامی با عمر محدود و تصادفی نگهداری می‌کنند. محصولات لبنیاتی، نان، گوشت و سبزیجات تازه از این نوع اقلام می‌باشند. بعضی از این محصولات، برای مثال شیر و سبزیجات یا نان، تا پایان عمر ثابت خود قابل مصرف می‌باشند، ولیکن از نظر مصرف‌کنندگان هرچه از زمان تولید آنها بگذرد مطلوبیت کمتری پیدا کرده و مبلغ کمتری برای خرید آنها پرداخت می‌کنند. به عبارت دیگر بهای فروش محصول وابسته به عمر سپری شده ازمحصول است. این دسته از اقلام را اقلام فاسد شدنی وابسته به زمان[1] می‌نامند.

اغلب جهت ساده سازی مدل‌های ریاضی موجودی، سیستم‌های موجودی یک سطحی فرض می‌شوند. ولیکن در دنیای واقعی، عموماً در سطح اوّل تولید کننده کالا در سطح دوّم توزیع کننده و یا مصرف کننده کالا وج دارد. در سیستم‌های دو سطحی[2] با مواد فاسد شدنی توجه به ویژگی کالا درهنگام ورود به سطح اول و تغییراتی که ممکن است در سطح اول در آن روی د فاسد شدن کالا یا در سطح اول و یا در سطح دوم ر خواهد داد. با توجه به تغییرات فیزیکی یا شیمیا محصول در گذر از سطح اول به سطح دوم، عموماً شرا و هزینه‌های نگهداری نیز در دو سطح متفاوت می‌باشد. در این مقاله با توجه به وسعت صنایع غذایی و شیمی کشور که نگهدارنده اقلامی با عمر محدود هستند، به ا مدلی سیستم موجودی دو سطحی، ذخیره کننده اق فاسد شدنی با عمر تصادفی و در شرایطی تورّم می‌پردازیم.

مرور ادبیات

می‌توان ادبیات موضوع را به سه دستهٔ مدل‌ه موجودی همراه با تورم، مدل‌های موجودی اقلام ف شدنی و بالاخره مدل‌های موجودی دو سطحی تقه

کرد. مقالات متعددی در هر دسته انتشار یافته است. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد، موضوع مورد بررسی در این مقاله که همزمان اثرات تورم، چند سطحی بودن سیستم و فاسد شدنی بودن اقلام را در نظر می‌گیرد تا به حال مورد توجه محققان قرار نگرفته است. اما تعداد محدودی مقالات وجود دارند که تورم را به همراه اقلام فاسد شدنی و یا سیستم دو سطحی به همراه اقلام فاسد شدنی را در نظر گرفته‌اند. در ادامهٔ به این تحقیقات اشاره خواهیم کرد.

Buzacott [۱] نشان داد با فرض اینکه همه هزینه‌ها با نرخ تورّم یکسان و ثابت و بصورت پیوسته در طی زمان افزایش یابند، افزایش حجم موجودی روی می‌دهد. Misra [۲] با در نظر گرفتن دو نرخ تورّم داخلی (تورّم موجود در سطح شرکت) و خارجی (تورّم عمومی جامعه) هزینه ها را به دو طبقه تفکیک نمود و به تعیین مقدار سفارش اقتصادی پرداخت.Moon و Lee [۳] به بررسی اثر تورّم و ارزش زمانی پول بر روی میزان سفارش اقتصادی اقلامی با عمر تصادفی پرداختند. با فرض اینکه عمر محصول از توزیع نرمال پیروی می‌کند، از روش شبیه‌سازی برای حل مدل استفاده شده است.

Nahmias [۴] مروری از تحقیقات صورت‌گرفته بر روی کالاهای فاسد شدنی ارائه داده است که بسیار مفید و جامع می‌باشد. وی تمام مدلهای ارائه شده تا سال ۱۹۸۲ را به نقد وبررسی کشانده است. در تکمیل آن، Raafat [۶] به بررسی مدل‌های توسعه داده شده تا سال ۱۹۹۰ می‌پردازد. Chauduri etal [۷] یک مدل EOQ برای مواد فاسد شدنی با در نظر گرفتن اثرات تورّم ارائه داده و فرض کرده‌اند اقلام با نرخ ثابتی در طی زمان فاسد می‌شوند. فرضیات دیگر آنان، افزایش تقاضا با گذشت زمان و مجاز بودن کمبود است.

Williams [۵] با مطالعه سیستم‌های چند سطحی، ثابت کرد در سیستم دو سطحی با تقاضای ثابت میزان سفارش اقتصادی بهینه در سطح اوّل، n برابر میزان سفارش اقتصادی در سطح دوّم است، بطوریکه n عددی مثبت و صحیح می‌باشد. آخرین تحقیقات صورت پذیرفته در سیستم‌های چند مرحله‌ای را می‌توان در مقالات [۱۱و ۱۲] یافت.

Ziegler و Abdel-Malek [۸] به بررسی سیستم‌های دو مرحله‌ای پرداخته‌اند که دارای کالای فاسد شدنی از نوع وابسته به زمان و تقاضای ثابت هستند. مدل‌های ریاضی در دو حالت که کالا در سطح اوّل یا در سطح دوّم فاسد می‌شود ارائه شده‌اند. Fujiwara et al [۹] به ارائه مدلی دو سطحی برای محصولاتی با عمر ثابت پرداخته است. محصولات دارای تقاضای احتمالی بوده و پس از مدت زمان مشخصی، از نوع نامرغوب محسوب می‌شوند به نحویکه تنها دارای ارزش کالاهای بازیافت هستند. همچنین فرض شده است موجودی اضطراری در سیستم وجود دارد که در هنگام وقوع کمبود در سطح دوّم مورد استفاده قرار می‌گیرد. مدل برای m محصول و n پریود طراحی شده است.

مدل مورد نظر این مقاله با در نظر گرفتن اثرات تورم تعمیم مدل‌های مقالات [۸] و [۹] می‌باشد.

فرضیات و نمادها

برای تشریح مدل به نمادهای زیر نیازمندیم:

P: قیمت فروش واحد کالا در زمانی که عمر سپری شده کالا صفر است. به عبارت دیگر زمانی که کالا تازه تولید شده است.

t: واحد زمان بر اساس روز، ماه یا هر واحد دیگری.

T': زمان سیکل سفارش دهی در سطح اوّل.

T'': زمان سیکل سفارش دهی در سطح دوّم.

T_p: عمر کالای فاسد شدنی در سطح اوّل.

T_f: عمر کالای فاسد شدنی در سطح دوّم.

α: ضریب کاهش قیمت کالا، که فرض می شود عددی مثبت و کوچکتر یا مساوی $\frac{P}{T'}$ است.

r: نرخ بهره

i: نرخ تورّم

R: نرخ بهره بدون تاثیر تورّم ($R = r - i$).

A_p, A_f: هزینه های سفارش دهی به ترتیب در سطح اوّل[۳] و سطح دوّم (آخر[۴]).

V_p, V_f: هزینه‌های خرید واحد کالا در سطح اوّل و سطح دوّم.

r_p, r_f: هزینه های نگهداری یک واحد پولی کالا در واحد زمان در سطح اوّل و سطح آخر. (در بعضی سیستم‌ها، هزینه‌های نگهداری در سطح اوّل و سطح آخر برابر

$(r_p = r_f = r)$ و در بعضی دیگر بر اساس نیازمندی کالا به سیستم های سرمایش و گرمایش متفاوت می‌باشند.

V_a: ارزش افزوده شده کالا پس از گذر از سطح اوّل به سطح آخر. $V_a = V_f - V_p$

D: نرخ تقاضا.

Qp: میزان سفارش اقتصادی در سطح اول.

Q_f: میزان سفارش اقتصادی در سطح دوّم.

R': درآمد.

H_p: مجموع هزینه‌های نگهداری در سطح اول.

H_f: مجموع هزینه‌های نگهداری در سطح آخر.

H: مجموع هزینه‌های نگهداری در سطح اوّل و آخر.

$$H = H_p + H_f$$

Z: میزان سود خالص.

فرضیات مدل به شرح زیر است:

۱. نرخ تقاضا ثابت است.

۲. زمان تحویل سفارش[۵] صفر است.

۳. سیستم در بر دارنده یک نوع محصول است.

۴. در سطح دوّم فقط یک انبار وجود دارد.

۵. کمبود مجاز نمی‌باشد.

۶. یک تامین کننده وجود دارد.

۷. هزینه نگهداری کالا می‌تواند در هر سطح متفاوت باشد.

۸. ظرفیت تعداد سفارش نامحدود است.

۹. تورّم در فاصله‌های زمانی $\frac{Q_f}{D}$ مرکب می‌شود (هزینه‌ها در طول فاصله بین هر بار سفارش تغییر نمی‌کنند).

۱۰. کاهش قیمت بصورت خطی و پیوسته و از رابطه زیر تبعیت می‌کند:

$$C(t) = \begin{cases} P - \alpha t & 0 \le t \le T \\ 0 & t \ge T \end{cases}$$

هر چند در رابطه فوق تغییرات قیمت پیوسته فرض شده است، ولیکن معمولاً در عمل فروشندگان کالا در بازه‌ای از زمان قیمت را ثابت نگه می‌دارند و پس از مدتی مقداری کاهش می‌دهند و سپس دوباره تا مدتی ثابت نگه می‌دارند. بنابراین قیمت بصورت پیوسته نسبت به زمان کاهش نمی‌یابد و تنها برای مدل سازی تقریبی خطی از روند کاهش قیمت بدست می‌آورند. در ادبیات موضوع به دو نوع تقریب برمی‌خوریم. در نوع اوّل قیمت ها در زمانهای مساوی با کاهش‌های مساوی روبرو می شوند، شکل (۱). در این موارد، خط تقریب کاملاً بر مرکز ثقل نمودار برازش می‌شود تا خطا به حداقل ممکن برسد. نوع دوّم مواردی است که قیمت‌ها در زمانهای نامساوی و به مقدار نامساوی کاهش می‌یابند. در این حالت با استفاده از رگرسیون خطی تقریب زده می‌شود، شکل(۲).

ساخت مدل

هدف حداکثرسازی سود می‌باشد. می‌دانیم:

هزینه سفارش + هزینه خرید] - درآمد = سود
[هزینه نگهداری +

در ادامه هر یک از مولفه‌های رابطهٔ سود جداگانه بررسی خواهند شد.

درآمد (R')

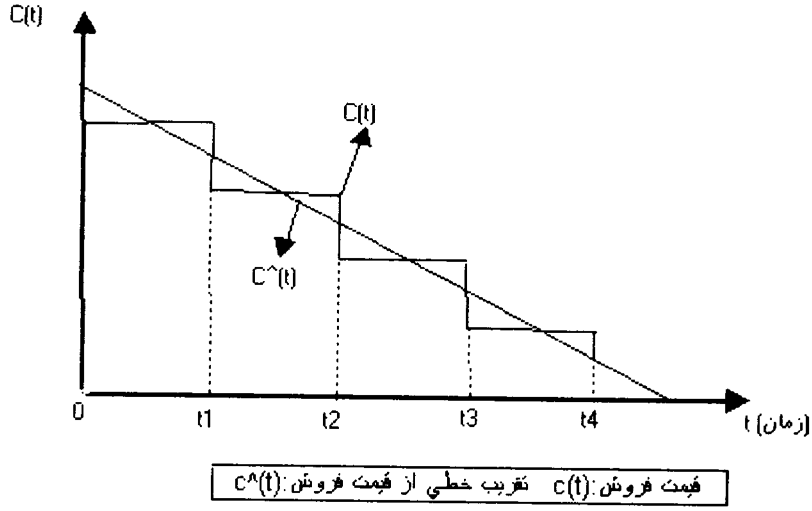
برای محاسبه درآمد نیاز به دانستن مرحلهٔ شروع فساد اقلام داریم. بسته به فاسد شدن کالا در سطح اوّل یا در سطح دوّم درآمد متفاوتی خواهیم داشت.

فساد کالا در سطح اوّل صورت می‌گیرد

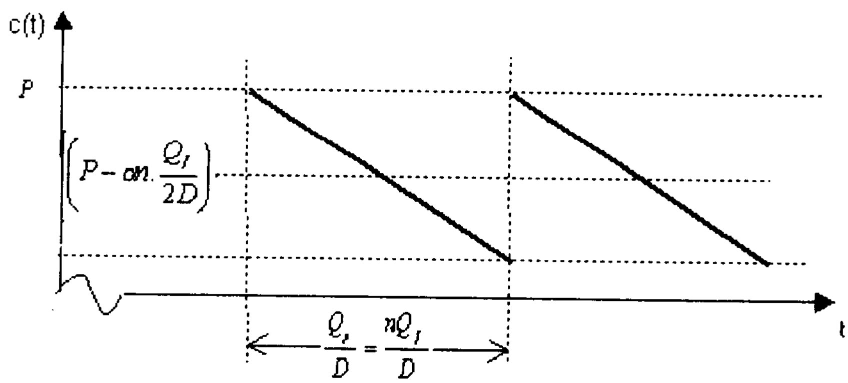
درصورتیکه فاسد شدن کالا در سطح اوّل صورت گیرد، کاهش قیمت فقط در سطح اوّل رخ می‌دهد و در سطح دوّم قیمت ثابت می‌ماند. رفتار کاهش قیمت بدون اثرات تورّم در شکل (۳) نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، قیمت کالا به مرور زمان مطابق رابطه خطی y = -ax+b از قیمت اوّلیه p و با شیب α- کاهش می یابد. بنابراین میانگین قیمت فروش برابر خواهد شد با: $\left(P - \alpha n.\frac{Q_f}{2D}\right)$.

در آمد کل برابر حاصل‌ضرب مقدار کالای فروش رفته در میانگین قیمت می‌باشد. اثر تورّم نیز با توجه به زمان و مقدار پول باید لحاظ شود.

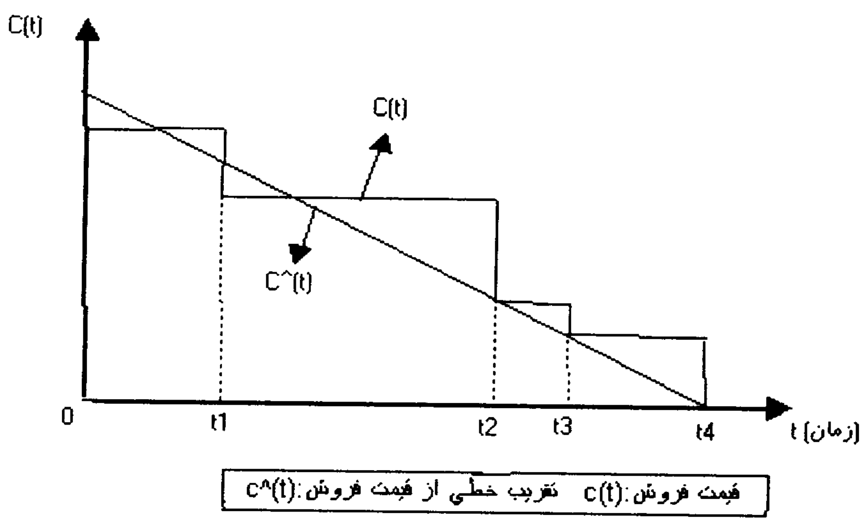
چون فروش در سطح دوّم رخ می‌دهد و هر بار به اندازه Q_f در فاصله زمانی $\frac{Q_f}{D}$ به فروش می‌رسانیم، برای بدست آوردن ارزش فعلی درآمد (با توجه به اثر تورّم)، باید



شکل ۱ : قیمت کاهش در زمانهاس مساوی.



شکل ۲ : تغییر قیمت ها با رگرسیون خطی



شکل ۳ : رفتار کاهش قیمت در سطح اول بدون اثرات تورم.

مقدار فروش را در اثر تورّم (e^{-Rt}) ضرب کرد. در این رابطه، t فاصله زمانی سپری شده از زمان حال می‌باشد. بنابراین درآمد کل برابر است با:

$$R' = \text{مقدارفروش} \times \text{میانگین قیمت}$$

$$= \left(P - \alpha n.\frac{Q_f}{2D}\right)$$

$$\left(Q_f + Q_f e^{-RT''} + Q_f{}^{-2RT''} + ... + Q_f e^{-(\frac{D}{Q_f}-1)RT''}\right)$$

در معادله فوق $(R = r - i)$ و T'' زمان سیکل است.

یادآور می‌شود اثر تورّم در فاصله‌های زمانی مابین $\frac{Q_f}{D}$ نادیده گرفته شده است. در عمل نیز به اینگونه می‌باشد. یعنی تا وقتی سفارش جدیدی دریافت نکرده‌ایم قیمت‌ها ثابت است. بنابراین در سیکل اوّل اثری از تورّم نمی‌یابیم. در سیکل دوّم اثر تورّم را (فاکتور $e^{-RT''}$) به اندازه طول سیکل اوّل ($\frac{Q_f}{D} = T''$) خواهیم داشت. در سیکل سوّم سفارش، اثر تورّم را به اندازه طول سیکل اوّل به اضافه سیکل دوّم خواهیم داشت (فاکتور $e^{-2RT''}$) و به همین ترتیب در سیکل آخر با توجه به اینکه تعداد سیکل‌های موجودی برابر $\frac{D}{Q_f}$ است از فاکتور $e^{-(\frac{D}{Q_f}-1)RT''}$ استفاده شده است.پس از ساده سازی داریم:

$$R' = \left(P - \alpha.n.\frac{Q_f}{2D}\right).Q_f \sum_{i=0}^{\frac{D}{Q_f}-1} e^{-RiT''}$$

$$= \left(P - \alpha.n.\frac{Q_f}{2D}\right).\frac{1 - e^{-R}}{1 - e^{-R\frac{Q_f}{D}}}$$

با در نظر گرفتن بسط مک لورن:

$$1 - e^{-X} = X - \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} - \frac{X^4}{4!} + ...$$

و این نکته که معمولاً وقتی x اعشاری است مقادیر $\frac{X^3}{3!}$ و به بعد خیلی کوچک و قابل صرفنظر می‌باشند، خواهیم داشت: $1 - e^{-X} \approx X - \frac{X^2}{2!}$

و بالاخره اینکه اگر x خیلی کوچک باشد(حدوداً زیر ۰/۰۳) می‌توان از تقریب زیر استفاده کرد:

$$1 - e^{-X} \approx X$$

در این مقاله، با توجه به اینکه R برابر نرخ بهره بدون اثر تورّم و یک عدد اعشاری است:

$$1 - e^{-R} \approx R - \frac{R^2}{2} = \frac{R(2-R)}{2}$$

هنگامیکه R در کسری کوچک مثل $\frac{Q_f}{D}$ یا $\frac{nQ_f}{D}$ ضرب می‌شود، مقدار خیلی کوچکتری حاصل می‌شود (به زیر ۳٪ می‌رسد)، بنابراین می‌توان تقریب‌های زیر را بکار گرفت:

$$1 - e^{\frac{-RnQ_f}{D}} \approx \frac{RnQ_f}{D}$$

$$1 - e^{\frac{-RQ_f}{D}} \approx \frac{RQ_f}{D}$$

با استفاده از آنها خواهیم داشت:

$$Q_f \sum_{i=0}^{\frac{D}{Q_f}-1} e^{-RiT''} = Q_f.\left(\frac{1 - e^{-R}}{1 - e^{-R\frac{Q_f}{D}}}\right)$$

$$= Q_f.\left(\frac{\frac{R.(2-R)}{2}}{\frac{R.Q_f}{D}}\right) = D.\left(\frac{2-R}{2}\right)$$

در نتیجه: $R' = \left(P - \alpha.n.\frac{Q_f}{2.D}\right).D.\left(\frac{2-R}{2}\right)$

فساد کالا در سطح دوّم صورت گیرد

در صورتیکه فاسد شدن اقلام در سطح دوّم صورت گیرد، افت قیمت فقط در سطح دوّم رخ می‌دهد و در سطح اوّل قیمت‌ها ثابت است. روند کاهش قیمت بدون اثر تورم در شکل (۴) نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌گردد، میانگین قیمت فروش برابر $\left(P - \alpha\frac{Q_f}{2D}\right)$ خواهد شد. بنابراین:

$$R' = \text{مقدارفروش} \times \text{میانگین قیمت}$$

$$= \left(P - \alpha.\frac{Q_f}{2D}\right)$$

$$\left(Q_f + Q_f e^{-RT''} + Q_f{}^{-2RT''} + ... + Q_f e^{-(\frac{D}{Q_f}-1)RT''}\right)$$

در نهایت داریم:

$$R' = \left(P - \alpha.\frac{Q_f}{2D}\right).D\left(\frac{2-R}{2}\right) \quad \text{(درآمد کل)}$$

هزینه‌های خرید

در سطح اوّل هزینه‌ای به اندازه V_P برای واحد کالا می‌پردازیم و ممکن است تا هنگامیکه کالا برای فروش در سطح دوّم آماده شود هزینه‌ای نیز به اندازه V_a متحمّل شویم. پس کل هزینه واحد کالا برابر (V_P+V_a) است و فرض می‌شود در ابتدای هر سیکل سفارش پرداخت می‌شود. لذا داریم:

هزینه خرید یک سیکل بدون تورّم $= (V_P+V_a)Q_P$

کل هزینه های خرید با در نظر گرفتن اثر تورّم خواهد شد:

$$V=(V_P+V_a)Q_P.\sum_{i=0}^{\frac{D}{Q_P}-1} e^{-RiT'}$$

$$=(V_P+V_a)Q_P.\frac{1-e^{-R}}{1-e^{\frac{-RQ_P}{D}}}$$

$$V=(V_P+V_a)Q_P.\frac{R-\frac{R^2}{2}}{\frac{RQ_P}{D}}=(V_P+V_a)D\left(\frac{2-R}{2}\right)$$

هزینه‌های سفارش

در سیستم‌های دو سطحی با یک سفارش در هر سطح روبرو هستیم که ممکن است هزینه‌های آنها نیز با هم متفاوت باشند. هزینه‌های سفارش در سطح اول برابر است با:

$$A_1=A_P.\sum_{i=0}^{\frac{D}{Q_P}-1} e^{-RiT'}$$

$$=A_P.\frac{1-e^{-R}}{1-e^{-R\frac{Q_P}{D}}}=A_P\left(\frac{D}{nQ_f}\right)\left(1-\frac{R}{2}\right)$$

و برای هزینه‌های سفارش در سطح دوّم داریم:

$$A_2=A_f.\sum_{i=0}^{\frac{D}{Q_f}-1} e^{-RiT''}$$

$$=A_f.\frac{1-e^{-R}}{1-e^{-R\frac{Q_f}{D}}}=A_f\left(\frac{D}{Q_f}\right)\left(1-\frac{R}{2}\right)$$

هزینه سفارش در سطح اوّل = کل هزینه‌های سفارش
هزینه های سفارش در سطح دوّم +

$$A=A_1+A_2=\left(A_P.\left(\frac{D}{nQ_f}\right)+A_f.\left(\frac{D}{Q_f}\right)\right)\left(1-\frac{R}{2}\right)$$

اگر هزینه های سفارش در هر دو سطح برابر باشند یعنی $A_P=A_f=A'$ آنگاه خواهیم داشت:

$$A=A'\left(1-\frac{R}{2}\right)\left(\frac{(n+1).D}{n.Q_f}\right)$$

هزینه‌های نگهداری

از جمع هزینه‌های نگهداری در سطح اوّل (H_P) و هزینه‌های نگهداری در سطح دوّم (H_f) کل هزینه های نگهداری(H) بدست می‌آید:

$$H=H_P+H_f$$

هزینه‌های نگهداری در سطح اوّل (H_P)

رفتار موجودی در سطح اوّل به مانند شکل (۵) می‌باشد. در لحظه صفر، هنگامیکه سفارشی به اندازه Q_P وارد انبار می‌شود، یک سفارش درخواست کالا به اندازه Q_f از سطح دوّم دریافت می‌شود. پس از ارسال این سفارش به سطح دوم، مقدار (Q_P-Q_f) کالا به اندازه فاصله زمانی $\left(\frac{Q_f}{D}\right)$ ثابت در انبار می‌ماند و بعد از طی شدن این فاصه زمانی، دوباره درخواست کالایی به اندازه Q_f از سطح دوم دریافت می‌شود. پس از ارسال آن مقداری برابر (Q_P-2Q_f) واحد کالا در انبار می‌ماند و به همین نحو تکرار می‌شود. بدین ترتیب خواهیم داشت:

=میانگین موجودی در سطح اوّل

$$\begin{bmatrix}(Q_P-Q_f)+(Q_P-2Q_f)\\+(Q_P-3Q_f)+\dots+\left(Q_P-(\frac{Q_P}{Q_f}).Q_f\right)\end{bmatrix}\frac{1}{n}$$

با توجه به $n=\left(\frac{Q_P}{Q_f}\right)$ خواهیم داشت:

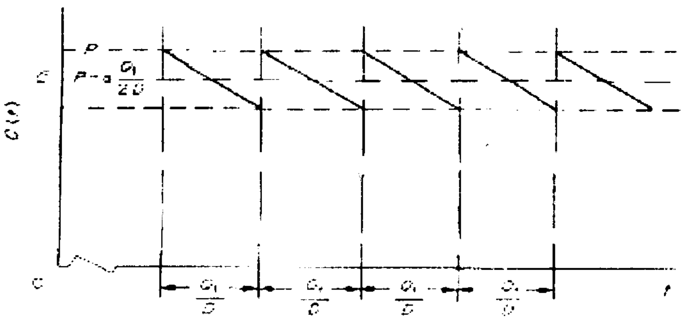
= میانگین موجودی در سطح اوّل

$$\left[nQ_P-\sum_{V=1}^{n}VQ_f\right].\frac{1}{n}=\left[nQ_P-\frac{1}{2}nQ_f(1+n)\right].\frac{1}{n}$$

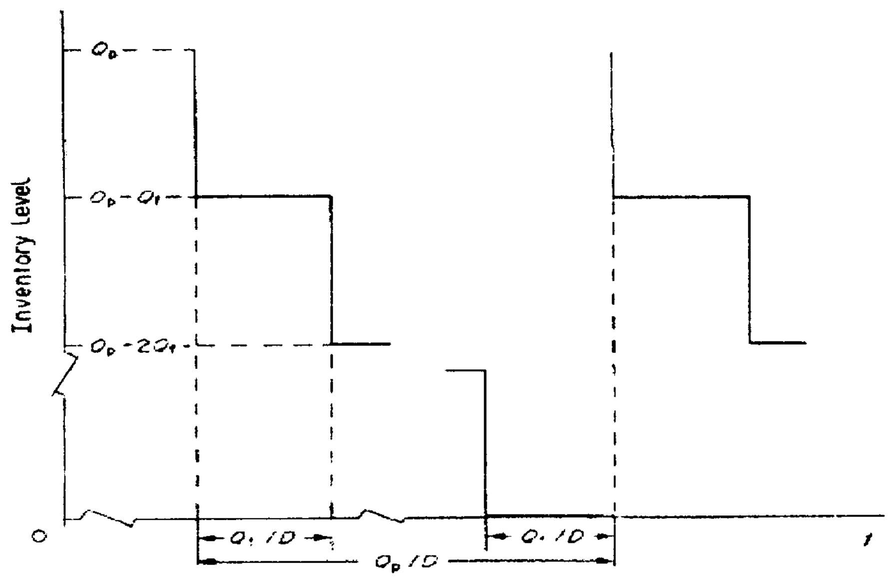
$$=\left[nQ_P-\frac{1}{2}Q_P-\frac{1}{2}nQ_P\right].\frac{1}{n}$$

$$=\left[\frac{n}{2}Q_P-\frac{1}{2}Q_P\right].\frac{1}{n}=\frac{1}{2}.Q_P\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$=\frac{(n-1)}{2}.Q_f$$



شکل ۴ : رفتار کاهش قیمت بدون اثرات تورم در سطح دوم.



شکل ۵ : رفتار موجودی در سطح اول.

از حاصل ضرب میانگین موجودی سطح اوّل در هزینه های نگهداری واحد کالا با احتساب اثر تورم، هزینه های نگهداری در سطح اوّل محاسبه می‌شوند:

هزینه نگهداری واحد کالا=(فاکتور تنزیل×(یک سیکل نگهداری در سطح دوّم× نرخ نگهداری واحد پولی کالا × قیمت خرید))

$$H_p = \frac{(n-1)}{2}.Q_f..V_p.r_p.\frac{Q_f}{D}.\sum_{i=0}^{\frac{D}{Q_p}-1} e^{-Ri\frac{Q_p}{D}}$$

$$= \frac{(n-1)}{2}.Q_f.V_P.r_p.\frac{Q_f}{D}.\frac{R-\frac{R^2}{2}}{\frac{nRQ_f}{D}}$$

$$H_p = \frac{(n-1)}{2}.Q_f.V_p.r_p.\frac{Q_f}{D}\left(\frac{1-e^{-R}}{1-e^{-R\frac{Q_p}{D}}}\right)$$

$$= \frac{(n-1)}{2}.Q_f.V_P.r_p\left(\frac{2-R}{2}\right)$$

هزینه های نگهداری در سطح دوّم (H_f)

رفتار موجودی در سطح دوّم به مانند شکل (۶) می‌باشد. همانطور که در شکل نشان داده شده است، موجودی ابتدای هر سیکل به اندازه Q_f می‌باشد و بتدریج بصورت خطی از آن کاسته می‌شود تا در انتهای سیکل که به صفر می‌رسد. در سیکل های بعد نیز این روند به همین ترتیب تکرار می‌شود. بنابراین میانگین موجودی در طول یک سیکل همواره $\frac{Q_f}{2}$ می‌باشد. هزینه‌های نگهداری در سیکل دوّم خواهد شد:

$$H_f = V_f.r_f.\frac{Q_f}{2}.\frac{Q_f}{D}.\sum_{i=0}^{\frac{D}{Q_f}-1} e^{-RiT^*}$$

$$= V_f.r_f.\frac{Q^2_f}{2D}.\frac{D(2-R)}{2Q_f} = V_f.r_f.\frac{Q_f(2-R)}{4}$$

مجموع هزینه‌های نگهداری خواهد بود:

$$H = H_p + H_f =$$

$$V_f.r_f.\frac{Q_f}{2}.\frac{(2-R)}{2} + \frac{(n-1)}{2}.Q_f.V_p.r_p\left(\frac{2-R}{2}\right)$$

$$H = \frac{Q_f(2-R)}{2}\left(\frac{(n-1)}{2}.V_p.r_p + \frac{1}{2}.V_f.r_f\right)$$

اگر هزینه‌های نگهداری واحد کالا در سطح اول و دوم برابر باشند $r_p = r_f = r$، آنگاه:

$$H = \frac{Q_f.(2-R)r}{2}\left(\frac{(n-1)}{2}V_p + \frac{1}{2}V_f\right)$$

حل مدل توسعه داده شده

همانطور که ذکر شد، هدف تعیین میزان حداکثر سود است. با توجه به فرض مجاز نبودن کمبود، تمام سفارشات باید برآورده شوند. از طرف دیگر کالا در هنگام فروش عمری حداکثر به اندازهٔ T_f یا T_p خواهد داشت. بنابراین اگر کالا در سطح اول شروع به فاسد شدن کند، محدودیت $\frac{nQ_f}{D} \le T_p$ و اگر در سطح دوم شروع به فاسد شدن می‌کند، محدودیت $\frac{Q_f}{D} \le T_f$ را به همراه تابع هدف خواهیم داشت.

فساد کالا در سطح اول صورت گیرد

$$Z = \left(P - \alpha.\frac{n.Q_f}{2D}\right).D\left(\frac{2-R}{2}\right) -$$

$$\left[\begin{array}{l}\left(\frac{A_p}{n} + A_f\right)\left(\frac{D}{Q_f}\right)\left(1-\frac{R}{2}\right) + (V_p + V_a).D\left(\frac{2-R}{2}\right) \\ + \frac{Q_f(2-R)}{2}\left(\frac{(n-1)}{2}.V_p.r_p + \frac{1}{2}.V_f.r_f\right)\end{array}\right]$$

$$\text{s.t:} \quad \frac{nQ_f}{D} \le T$$

برای محاسبه Q_f و n، از Z نسبت به آنها مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم. برای بررسی مقعر بودن تابع هدف و در جهت اطمینان از منحصر به فرد بودن سود ماکزیمم ، از تابع مشتق دوم می‌گیریم.

$$\frac{\partial z}{\partial Q_f} = \left[\begin{array}{l} -\frac{\alpha.n}{2} + \frac{\left(\frac{A_p}{n} + A_f\right).D}{{Q_f}^2} - \\ \left(\frac{(n-1)}{2}V_p r_p + \frac{V_f r_f}{2}\right)\end{array}\right]\left(1-\frac{R}{2}\right) = 0$$

(۱)

$$\frac{\partial Z}{\partial n} = \left[-\frac{\alpha Q_f}{2} + \frac{A_p D}{n^2 Q_f} - \frac{Q_f V_p r_p}{2}\right]\left(1-\frac{R}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial n} = \left[-3\times\frac{A_p D}{n3Q_f}\right]\left(1-\frac{R}{2}\right) \le 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial Q_f} = \left[-2\times\frac{\left(\frac{A_p}{n} + A_f\right).D}{{Q_f}^3}\right]\left(1-\frac{R}{2}\right) \le 0$$

(۲)

از رابطه (۱) به رابطه زیر می‌رسیم

$$Q_f = \sqrt{\frac{2\left(\frac{A_p}{n} + A_f\right)D}{\alpha.n + nV_p r_p - V_p r_p + V_f r_f}}$$

(۳)

از (۲) $\Rightarrow n = \frac{1}{Q_f}.\sqrt{\frac{2DA_p}{(\alpha + V_p r_p)}}$

(۴)

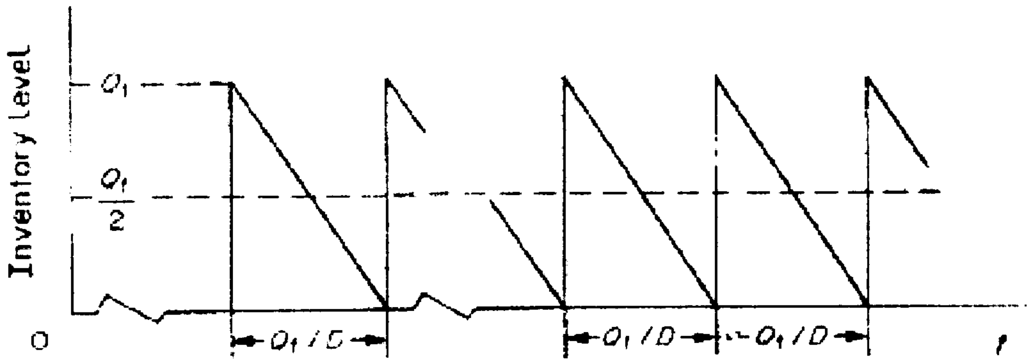
از (۳) و(۴) $\Rightarrow n = \sqrt{\frac{A_p(V_f r_f - V_p r_p)}{(\alpha + V_p r_p)A_f}}$

(۵)

و $Q_f = \sqrt{\frac{2A_f D}{V_f r_f - V_p r_p}}$

(۶)

مقدار محاسبه شده Q_f و n را در محدویت $\frac{n.Q_f}{D} \le T$ قرار می‌دهیم، اگر محدودیت برقرار باشد، Q_f و n جواب بهینه مسئله خواهند بود، در غیر این‌صورت، مسئله جواب بهینه ندارد. در این حالت با توجه به اینکه مشتق دوم تابع هدف نسبت به Q_f و n کوچکتر یا مساوی صفر است، میتوان از الگوریتم جستجوی زیر برای یافتن حل بهینه استفاده کرد:



شکل ۶: رفتار موجودی در سطح دوم.

۱ - با توجه به اینکه فاسد شدن در سطح اول روی می‌دهد، در رابطه

$$\frac{nQ_f}{D} = T_p \tag{۷}$$

۲ - به n مقدار یک دهید و از آن مقدار Q_f را بدست آورید. آنگاه با داشتن این دو مقدار، سود را حساب کنید.

۳ - به n یک رقم اضافه کنید و از رابطه (۷) مقدار Q_f را بدست آورید. مقدار سود را حساب کنید.

۴ - در صورتیکه بهبودی در مقدار سود ایجاد شده است، قدم ۲ را تکرار کنید، در غیر اینصورت مقدار قبلی سود، ماکزیمم سود است.

فساد کالا در سطح دوم صورت گیرد

جزئیات به مانند قسمت قبل است. لذا از ذکر آنها خودداری می‌کنیم. مدل نهایی خواهد بود:

$$Z=\left(P-\alpha.\frac{Q_f}{2D}\right).D\left(\frac{2-R}{2}\right)-$$
$$\left[\left(\frac{A_P}{n}+A_f\right)\left(\frac{D}{Q_f}\right)\left(1-\frac{R}{2}\right)+\left(V_P+V_a\right)D\left(\frac{2-R}{2}\right)+\frac{Q_f.(2-R)}{2}\left(\frac{(n-1)}{2}.V_P.r_P+\frac{1}{2}.V_f.r_f\right)\right]$$

$$\text{s.t: } \frac{Q_f}{D}\le T$$

با مشتق‌گیری از Z نسبت به Q_f و n و برابر صفر قرار دادن آنها، Q_f و n بدست می‌آیند.

$$\frac{\partial z}{\partial Q_f}=\left[-\frac{\alpha}{2}+\frac{\left(\frac{A_P}{n}+A_f\right).D}{{Q_f}^2}-\left(\frac{(n-1)}{2}V_Pr_P+\frac{V_fr_f}{2}\right)\right]\left(1-\frac{R}{2}\right)=0 \tag{۸}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial n}=\left[\frac{A_PD}{n^2Q_f}-\frac{Q_fV_Pr_P}{2}\right]\left(1-\frac{R}{2}\right)=0 \tag{۹}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial n}=\left[-3\times\frac{A_PD}{n3Q_f}\right]\left(1-\frac{R}{2}\right)\le 0$$ و

$$\frac{\partial^2 z}{\partial Q_f}=\left[-2\times\frac{\left(\frac{A_P}{n}+A_f\right).D}{{Q_f}^3}\right]\left(1-\frac{R}{2}\right)\le 0$$

از رابطه (۸):

$$Q_f=\sqrt{\frac{2\left(\frac{A_P}{n}+A_f\right)D}{\alpha+nV_Pr_P-V_Pr_P+V_fr_f}} \tag{۱۰}$$

از رابطه (۹) $\Rightarrow n=\frac{1}{Q_f}.\sqrt{\frac{2DA_P}{V_P.r_P}}$ (۱۱)

از(۱۰)و(۱۱) $\Rightarrow n=\sqrt{\frac{A_P\left(\alpha+V_fr_f-V_Pr_P\right)}{A_f.v_p.r_p}}$ (۱۲)

$$Q_f=\sqrt{\frac{2A_fD}{\alpha+V_fr_f-V_pr_p}}$$

(۱۳)

مقادیر محاسبه شده Q_f و n از روابط (۱۲) و (۱۳) را در محدویت $\frac{Q_f}{D}\le T$ قرار می‌دهیم. اگر محدودیّت برقرار بود آنگاه، Q_f و n ، جواب بهینه مسئله خواهند بود. در صورتیکه محدودیّت مسئله بر قرار نباشد، ابتد از معادله $\frac{Q_f}{D}=T_f$ مقدار Q_f را بدست آورده، آنگاه به ازاء مقادیر مختلف n ، با شروع از n=1، مقدار سود محاسبه شده و هرگاه روند افزایشی سود متوقف گردید، مقدار سود حداکثر بدست خواهد آمد.

حل مسائل نمونه

دو مسئله نزدیک به دنیای واقعی جهت بررسی صحت مدل و روش حل آن ارائه می‌گردد.

مسئله ۱

کارخانه X از تولید کنندگان آبلیمو می‌باشد و دارای یک سیستم دو سطحی موجودی است. در سطح اوّل (کارخانه) لیمو خریداری شده و تبدیل به آبلیمو می‌گردد. در سطح دوّم توزیع کننده (انبار مرکزی) قرار گرفته است. برای پاسخ‌گویی به تقاضای مشتریان، سالیانه به ۲۰۰۰۰۰ کیلو لیموی تازه نیاز است. با توجه به اطلاعات زیر میزان سفارش اقتصادی در هر سطح و همچنین میزان حداکثر سود محاسبه شده است.

۱-لیموی خریداری شده تازه می‌باشد و با توجه به شرایط گهداری حداکثر دو ماه قابل استفاده است.

۲- نرخ بهره ۱۷٪ در سال و همچنین نرخ تورم سالیانه ۱۰٪ فرض شده است.

۳- قیمت خرید هر کیلو لیمو ۵۰۰ تومان و هزینه آبگیری بسته بندی هر کیلو ۲۵۰ تومان محاسبه شده است.

۴- قیمت فروش آبلیمو بستگی به عمر سپری شدهٔ لیمو ر سطح اوّل دارد. هر کیلو آب لیموی تازه (بلافاصله پس تولید) دارای قیمت ۹۰۰ تومان می‌باشد و بصورت خطی ا قیمت هر کیلو ۸۰۰ تومان برای آبلیمویی که از لیموی ء ماه مانده گرفته شده است کاهش می‌یابد.

۵- هزینه هر بار سفارش دهی در سطح اوّل ۵۰۰۰۰ تومان و در سطح دوّم ۶۰۰ تومان است.

۶- هزینه‌های نگهداری در سطح اوّل و دوّم به ترتیب ۱ و ۱/۵ ریال به ازا هر تومان کالای نگهداری شده فرض شده است.

در سطح اوّل سیستم، لیمو نگهداری می‌شود که دارای عمر کوتاهی است و در این مدت نیز ارزش ثابتی ندارد. در سطح دوّم، آبلیموی بسته بندی شده نگهداری می‌شود که دارای عمر طولانی و با ارزش ثابت است. بنابراین سیستم از نوع فاسد شدنی وابسته به زمان در سطح اوّل است.

$$y=-ax+b$$

$$\begin{cases}P=-\alpha t+b & 0\le t\le\frac{1}{6}\\ 0 & t\ge\frac{1}{6}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}900=-\alpha.0+b\rightarrow b=900\\ 800=-\alpha.\frac{1}{6}+900\rightarrow\alpha=600\end{cases}$$

$D=200000$ (سال/ کیلو)

$r_P=0.1$ و $r_f=0.15$ (سال/تومان/تومان)

$i=\%14$ و $r=\%17$ و $R=r-i=\%3$

$A_P=50000$ $A_f=600$ (هربار/تومان)

$P=900$ (کیلو/تومان)

$T_P=\frac{1}{6}$ (سال)

$\alpha=600$ (سال/کیلو/تومان)

$V_P=500$ و $V_a=250$ (کیلو/تومان)

$V_f=V_p+V_a=750$ (کیلو/تومان)

$$n=\sqrt{\frac{A_P(V_fr_f-V_Pr_P)}{(\alpha+V_Pr_P)A_f}}$$

$$=\sqrt{\frac{50000.(750\times0.15-500\times0.1)}{(600+500\times0.1).600}}=2.8\approx3$$

$$Q_f=\sqrt{\frac{2A_fD}{V_fr_f-V_Pr_P}}$$

$$=\sqrt{\frac{2\times600\times200000}{750\times0.15-500\times0.1}}\approx1960$$

$$\frac{nQ_f}{D}\le T_p\Rightarrow\frac{3\times1960}{200000}=0.0294<\frac{1}{6}$$

پس شرط برقرار است و Z=۲۵۸۷۱۸۵۸.

مسئله ۲

یک سیستم موجودی را در نظر بگیرید که در سطح اوّل آن کارخانه تولید آرد و در سطح دوّم یک تولید کننده نان فانتزی وجود دارد. در سطح اوّل این سیستم،

گـندم کـه محصولی با ارزش ثابت در طول عمر خود است نگهـداری شـده و تـبدیل بـه آرد مـی‌شـود. آرد نیـز کـه محصـولی بـا ارزش غذایـی ثابـت در طـول عمـر ثابـتش مـی‌باشـد بـه سـطح دوّم فرستاده می‌شود تا تبدیل به نان شـود. ظـرف سـه روز از لحظـه‌ای کـه نان تولید می‌شود، بهای فروش آن از ۱۵ تومان به ۹ تومان کاهش می‌یابد و بعـد از سـه روز بـه صـفر می‌رسد. با توجه به اطلاعات زیر میزان سفارش اقتصادی در هر سطح و سود ماهانه حساب شده است.

$r_p = r_f = 0.1$ (ماه/تومان/تومان)

$i = 20$ و $r = 15$ $R = i - r = 5$ (ماه/ درصد)

$D = 40000$ (ماه/قرص نان)

$A_p = 3000$ و $A_f = 2000$ (setup/تومان)

$P = 15$ (هر قرص نان/تومان)

$V_a = 4$ و $V_p = 3$ (هر قرص نان/تومان)

$V_f = V_p + V_a = 7$ (هر قرص نان/تومان)

$$T_f = \text{۳ روز} = \frac{1}{10} \text{ ماه}$$

$$y = -ax + b$$

$$\begin{cases} P = -\alpha t + b \Rightarrow 15 = 0 \times \alpha + b \Rightarrow b = 15 \\ \quad 9 = -0.1 \times \alpha + 15 \Rightarrow \alpha = 60 \end{cases}$$

$$n = \sqrt{\frac{A_p(\alpha - V_p r_p + V_f r_f)}{A_f V_p r_p}}$$

$$= \sqrt{\frac{3000(60 - 3 \times 0.1 + 7 \times 0.1)}{2000 \times 3 \times 0.1}} \approx 17$$

$$Q_f = \sqrt{\frac{2A_f.D}{\alpha - V_p r_p + V_f r_f}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 2000 \times 40000}{60 - 3 \times 0.1 + 7 \times 0.1}} \approx 1628$$

$$\frac{Q_f}{D} \le T_f \Rightarrow \frac{1628}{40000} = 0.0407 < \frac{1}{10}$$

پس شرط برقرار است و Z=۲۱۳۱۵۳

تجریه و تحلیل حساسیّت

بـرای بررسـی رفـتار سیستم در حالات مختلف، مقادیـر پارامتـرهای ورودی مدل تغییر داده شده و اثر آن بـر روی خروجـی‌ها بررسی شده است. نتایج این آنالیز در جدول (۱) مشاهده می‌شود. نتایج مهم به شرح ذیل است:

۱- مقدار Q_p با افزایش یا کاهش مقادیر Q_f و n رابطه مستقیم نداشته و تنها به حاصل ضرب این دو مقدار بستگی دارد.

۲- افـزایش هـزینه‌هـای نگهداری در انبار سطح دوّم (v_f, r_f) سـبب کاهش مقدار بهینه سفارش در این انبار مـی‌گـردد تـا بـدین وسـیله تـا حـد ممکن از هزینه های نگهداری مورد انتظار کاسته شود.

۳- افـزایش هـزینه نگهـداری در سـطح اوّل سـبب کـاهش مقـدار بهیـنه سفارش در سطح اوّل شده و طبیعتا مـدل سـعی مـی‌کـند موجـودی این انبار را به سوی انبار محلـی سـوق دهـد. بنابراین مقدار بهینه سفارش در سطح دوّم افزایش یافته و از تعداد سفارش کاسته می‌شود.

۴- افزایش هزینه سفارش دهی در سطح دوّم سبب کـاهش تعـداد سـفارش در ایـن سـطح مـی‌شود. لذا برای پاسـخگویی بـه تقاضـا، مقدار بهینه سفارش در سطح دوّم افـزایش یافـته و این تغییرات تأثیری بر مقدار سفارش در سطح اوّل ندارد.

۵- افـزایش هزینه سفارش دهی انبار مرکزی سبب مـی‌شود مقادیر بهینه سفارش در این انبار افزایش یافته و از تعـداد سـفارش‌های سالانه کاسته شود. ولی این افزایش تأثیـری برمقادیـر بهیـنه سفارش در انبار محلی نمی‌گذارد. لیکن به دلیل افزایش مقدار بهینه سفارش در انبار مرکزی و ثابت بودن مقدار بهینه سفارش، تعداد سفارش در سطح دوّم افزایش می‌یابد.

۶- افـزایش مقـدار α ، هنگامـیکه فاسـد شـدن وابسـته بـه زمان در سطح اوّل رخ دهد، باعث می شود که سیسـتم بـرای جلوگیـری از کـاهش هر چه بیشتر قیمت فـروش و در نهایـت کـاهش درآمـد، در سـطح اوّل مقـدار کمتـری سـفارش دهـد. چـون در سطح دوّم این حالت را نـداریم، بنابـراین مقـدار سـفارش ایـن سطح تغییری پیدا نمـی‌کـند. در ایـن حالت، چون مقدار کالای سفارش داده شـده در سطح اول کاهش می‌یابد و سفارش در سطح دوّم نیـز ثابـت اسـت، تعـداد دفعـات ارسـال کالا به سطح دوّم کاهش می‌یابد.

نتیجه‌گیری و جمع بندی

در این مقاله به بررسی یک سیستم موجودی دو

سطحی پرداخته شده است که امکان در نظر گرفتن هزینه‌های نگهداری متفاوت در هر سطح، فاسد شدن اقلام در سطح اول و یا سطح دوم و نیز اثرات تورم را دارد. بنابراین کاربردهای زیادی در دنیای واقعی خواهد داشت. نتایج حاصل از این تحقیق به ارایه و حل بهینه مدل‌های ریاضی در دو حالت فساد اقلام در سطح اول و سطح دوم سیستم موجودی منجر گردید. تجزیه و تحلیل حساسیت نشان می‌دهد که مدل‌های فوق تحت شرایط مختلف جواب مورد انتظار و قابل قبولی ارائه می‌دهند. در نتیجه کاملا کاربردی و منطبق با نیازهای روز صنایعی است که به نحوی با مواد فاسد شدنی سروکار دارند.

جدول ۱: نتایج تجزیه و تحلیل مدل.

عامل / متغیر	افزایش $v_f r_f$	افزایش $v_p r_p$	افزایش A_f	افزایش A_p	افزایش سطح α در اول	افزایش سطح α در دوم
n	افزایش	کاهش	کاهش	افزایش	کاهش	افزایش
Q_f	کاهش	افزایش	افزایش	بی تأثیر	بی تأثیر	کاهش
Q_p	بی تأثیر	کاهش	بی تأثیر	افزایش	کاهش	بی تأثیر

مراجع

1 - Buzacott, A. (1975). "Economic order quantities with inflation." *Operations Research*, Vol. 26, PP. 553-558.

2 - Misra, R. B. (1979). "A note on optimal inventory management under inflation." *Naval Research Logistic Quarterly*, Vol. 26, PP. 161-165.

3 - Moon, I. and Lee, S. (2000). "The effects of inflation and time-value of money, an economic order quantity model with a random product life cycle." *European Journal of Operational Research*, Vol. 125, PP. 588 - 601.

4 - Nahmias, S. (1982). "Perishable inventory theory: A review." *Operations Research*, Vol. 30, PP. 680-708.

5 - Williams, J. F. (1982). "On the optimality of integer lot size ratios in economic lot size determination in multi-stage assembly systems." *Management Science*, Vol. 28, PP. 1341-1349.

6 - Raafat, F. (1991). "Survey of literature on continuously deteriorating inventory models." *Journal of The Operational Research Society*, Vol. 42, PP. 27-37.

7 - Bose, S., Goswami, A. and Chauduri K. S. (1995). "An EOQ model for deteriorating items with linear Time-Dependent demand rate and shortages under inflation and time discounting." *Journal of the Operation Research Society*, Vol. 46, PP. 771–782.

8 - Abdel-Malek, L. L. and Ziegler, H. (1988). "Age dependent perishability in two-echelon serial inventory systems." *Computers and Operations Research*, Vol. 15, PP. 227-238.

9 - Fujiwara, O., Soewandi, H. and Sedarage, D. (1997). "An optimal ordering and issuing policy for a two–stage inventory system for perishable product." *European Journal of Operational Research*, Vol. 99. PP. 412-424.

10 - Yang, H. L., Teng, J. T. and Chen, M. S. (2001). "Deterministic inventory lot-size models under inflation with shortages deterioration for fluctuating demand." *Naval Research Logistics*, Vol. 48, PP. 144-158.

11- Modarres, M. and Teimory, E. (2002). "Optimal solution in a constrained distribution system." *IIE Transaction*, Vol. 15.

12 - Modarres, M. and Teimory, E. (1997). "Generalization of multi-retailer distribution systems." *Journal of Production Planning and Control*. Vol. 8.

واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1-Age Dependent Perishability
2-Two Echelons
3- Primary Echelon
4- Final Echelon
5- Lead Time