توزیع تنش در زیر پی های نامنظم

حسن رحیمی
دانشیار دانشگاه تهران
عبدالحسین هورفر
مربی دانشگاه تهران

چکیده

تاکنون مسئله توزیع تنش در زیر پی با شکل های مربع ، مستطیل و دایره براساس تئوریهای بوسینسک و وسترگارد و با فرض الاستیک بودن خاک حل و ضرایب مربوطه به صورت روابط ریاضی و یا نمودار ارائه شده است . در این مقاله پی بصورت عام در حالت یک چند ضلعی نامنظم فرض و با تقسیم آن به چند مثلث ، ضریب توزیع تنش براساس حل معادلات مربوطه محاسبه و نهایتاً با استفاده از کامپیوتر نمودار مناسب برای تعیین ضرایب ارائه گردیده است . مسئله برای حالتهای خاص مثلث قائم الزاویه و مستطیل نیز حل شده است .

۱ - مقدمه

مسئله تحلیل توزیع تنش در خاک در زیرپی ها همواره مورد توجه مهندسین و محققین مکانیک خاک و مهندسی پی قرار داشته است . اساس روشهای تعیین ضرایب توزیع تنش عموماً بر منبای تئوریهای بوسینسک و وسترگارد و تعیین ضریب توزیع تنش در زیر یک بار متمرکز استوار می باشد [۲و۸]. در این تئوریها خاک بصورت یک ماده الاستیک ، همروند (ایزوتروپ)، همگن ، و نیمه بینهایت که از سطح در تمام جهات تا بینهایت امتداد یافته ، فرض گردیده است . با پذیرش رابطه عمومی بوسینسک برای تعیین مولفه قائم تنش ایجاد شده در زیر یک بار متمرکز، و بسط آن برای بارگذاریهای خطی و سطحی ، امکان محاسبه مؤلفه قائم تنش در زیرپی های دارای شکلهای هندسی منظم (مربع ، مستطیل و دایره) فراهم شده است [۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷].

با توجه باینکه تاکنون برای تعیین توزیع تنش در زیرپی های دارای شکل هندسی نامنظم فرمول خاصی ارائه نگردیده، در این مقاله سعی شده است تا براساس تئوریهای بوسینسک ، ضرایب توزیع تنش برای هر شکل هندسی نامنظم (چند ضلعی نامنظم) محاسبه و نمودارهای مناسب جهت تعیین سریع آنها ارائه گردد.

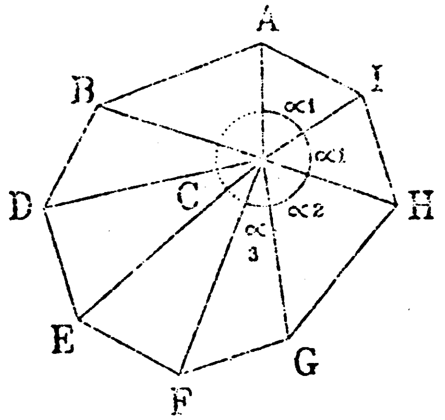
۲ - مدل ریاضی مسئله

براساس نظریه بوسینسک ، چنانچه یک بار متمرکز معادل Q در سطح خاک اعمال شود در اینصورت مؤلفه قائم تنش حاصل (σ_z) در عمق Z و بفاصله R از نقطه اعمال بار با رابطه عمومی زیر بیان می شود [۲]:

$$\sigma_z = \frac{3Qz^3}{2\pi R^5} \qquad (۱)$$

حال چنانچه یک سطح هندسی نامنظم (چند ضلعی نامنظم) ABDEFGHI مطابق شکل شماره (۱) و با شدت بار یکنواخت q فرض شود، مقدار مؤلفه قائم تنش حاصله در زیر نقطه C در داخل این سطح و در

عمق معین Z را می توان با تقسیم چند ضلعی به‌تعدادی مثلث ABC ، BCE و ... که نقطه C در رأس هریک از آنها قرار گرفته محاسبه نمود. بنابراین مسئله منجر می شود به محاسبه تنش ایجادشده در زیر رأس یک مثلث نامنظم باضلاع a و b و زاویه رأس α



شکل ۱: تقسیم بندی یک چند ضلعی نامنظم به چند مثلث.

شکل شماره (۲) مثلث CAB با زاویه رأس α و اضلاع a و b را در یک صفحه مختصات قائم نشان می دهد. این مثلث چنان در صفحه مختصات استقرار یافته که رأس C بر مبدأ مختصات و ضلع CA بر محور طولها منطبق می باشد. در اینصورت

$$\overline{CA} = a$$

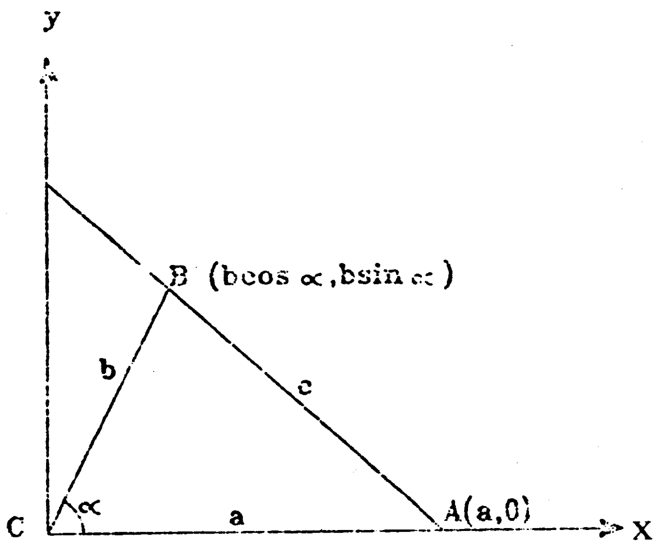
$$\overline{CB} = b$$

$$A\hat{C}B = \alpha$$

چنانچه یک جزء بینهایت کوچک باضلاع dx و dy در صفحه مثلث درنظر گرفته شود، در اینصورت طبق رابطه شماره (۱)، مقدار مؤلفه قائم تنش در نقطه‌ای به عمق z در زیر رأس C از رابطه زیر بدست می آید:

$$\sigma_z = \frac{3qz^3}{2\pi} \int_D \int \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \qquad (۲)$$

در این رابطه D قلمرو انتگرال گیری در سطح مثلث ABC و q شدت بار در واحد سطح می باشد.



شکل ۲: حالت کلی برای هر شکل مثلثی.

۳ - حل معادله مدل ریاضی

برای محاسبه انتگرال دوگانه (۲) از مختصات قطبی استفاده می شود.

(۳) معادله ضلع AB: $\frac{x-a}{y} = \frac{b\cos\alpha - a}{b\sin\alpha}$

رابطه فوق در مختصات قطبی (θ و ρ) بصورت زیر در می آید:

$$\rho = \frac{ab\sin\alpha}{a\sin\theta + b\sin(\alpha-\theta)} \qquad (۴)$$

بااستفاده از رابطه شماره (۴)، رابطه شماره (۲) نیز به مختصات قطبی برده می شود:

$$\sigma_z = \frac{3qz^3}{2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\alpha} \int_{\rho=0}^{\rho=\frac{a\,b\sin\alpha}{a\sin\theta + b\sin(\alpha-\theta)}} \frac{\rho d\rho\, d\theta}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}$$

$$= \frac{qz^3}{2\pi} \int_0^{\alpha} \{\frac{1}{z^3}[\frac{a^2b^2\sin^2\alpha}{[a\sin\theta+b\sin(\alpha-\theta)]^2}]^{-3/2}\} d\theta$$

با استفاده از متغیرهای کمکی $m=\frac{a}{z}$ و $n=\frac{b}{z}$ ، رابطه فوق بصورت زیر تبدیل می شود:

$$\sigma_z=\frac{q\alpha}{2\pi}-\frac{q}{2\pi}\int_0^{\alpha}\frac{[m\sin\theta+n\sin(\alpha-\theta)]^3}{\{m^2n^2\sin^2\alpha+[m\sin\theta+n\sin(\alpha-\theta)]\}^{3/2}}d\theta \tag{۵}$$

در رابطه فوق، σ_z نسبت به طول بدون بعد می باشد. برای محاسبه انتگرال در رابطه شماره (۵) بشرح زیر عمل می شود:

$$[m\sin\theta+n\sin(\alpha-\theta)]^2=m^2\sin^2\theta+n^2\sin^2(\alpha-\theta)+2mn\sin\theta\sin(\alpha-\theta)=m^2(1-\cos^2\theta)+n^2[1-\cos^2(\alpha-\theta)]+2mn\sin\theta\sin(\alpha-\theta)+2mn\cos\theta\cos(\alpha-\theta)-2mn\cos\theta\cos(\alpha-\theta)=m^2+n^2-[m^2\cos^2\theta+n^2\cos^2(\alpha-\theta)-2mn\cos\theta\cos(\alpha-\theta)]-2mn[\cos\theta\cos(\alpha-\theta)-\sin\theta\sin(\alpha-\theta)]=m^2+n^2-[-m\cos\theta+n\cos(\alpha-\theta)]^2-2mn\cos(\theta+\alpha-\theta)=m^2+n^2-2mn\cos\alpha-[-m\cos\theta+n\cos(\alpha-\theta)]^2$$

با جایگزین کردن رابطه شماره (۶) در رابطه شماره (۵)، معادله زیر حاصل می شود:

$$\sigma_z=\frac{q\alpha}{2\pi}-\frac{q}{2\pi}\int_0^{\alpha}\frac{\{m^2+n^2-2mn\cos\alpha-[-m\cos\theta+n\cos(\alpha-\theta)]^2\}[m\sin\theta+n\sin(\alpha-\theta)]d\theta}{\{m^2n^2\sin^2\alpha+m^2+n^2-2mn\cos\alpha-[-m\cos\theta+n\cos(\alpha-\theta)]^2\}^{3/2}}$$

با بکارگیری تغییر متغیر

$$[-m\cos\theta+n\cos(\alpha-\theta)]=\sqrt{m^2n^2\sin^2\alpha+m^2+n^2-2mn\cos\alpha}\,\sin t\,.$$

که:

$$[m\sin\theta+n\sin(\alpha-\theta)d\theta=\sqrt{m^2n^2\sin^2\alpha+m^2+n^2-2mn\cos\alpha}\,.\cos t.dt$$

نتیجه زیر حاصل می شود:

$$\sigma_z=\frac{q\alpha}{2\pi}-\frac{q}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2}\frac{m^2n^2-2mn\cos\alpha-(m^2n^2\sin^2\alpha+m^2+n^2-2mn\cos\alpha)\sin^2t}{(m^2n^2\sin^2\alpha+m^2+n^2-2mn\cos\alpha)\cos^2t}dt \tag{۷}$$

که در آن:

$$t_1=\mathrm{Arc\,sin}\frac{-m+n\cos\alpha}{\sqrt{m^2n^2\sin^2\alpha+m^2+n^2-2mn\cos\alpha}}$$

$$t_2=\mathrm{Arc\,sin}\frac{n-m\cos\alpha}{\sqrt{m^2n^2\sin^2\alpha+m^2+n^2-2mn\cos\alpha}}$$

نهایتاً رابطه شماره (۷) بصورت زیر تبدیل می‌گردد:

$$\sigma_z=\frac{q\alpha}{2\pi}-\frac{q}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2}[1-\frac{m^2n^2\sin^2\alpha}{m^2n^2\sin^2\alpha+m^2+n^2-2mn\cos\alpha)\cos^2t}]dt$$

$$=\frac{q\alpha}{2\pi}-\frac{q}{2\pi}\{t_2-t_1-\frac{m^2n^2\sin^2\alpha}{m^2n^2\sin^2\alpha+m^2+n^2-2mn\cos\alpha}(tgt_2-tgt_1)\}$$

پس از انجام عملیات جبری لازم و ساده کردن، نهایتاً رابطه زیر حاصل می شود:

$$\sigma_z=\frac{q}{2\pi}\{\alpha+\frac{m^2n^2\sin\alpha}{m^2n^2\sin^2\alpha+m^2+n^2-2mn\cos\alpha}(\frac{n-m\cos\alpha}{m\sqrt{n(^2+1)}}+\frac{m-n\cos\alpha}{n\sqrt{(m^2+1)}})-(\mathrm{Arc\,sin}\frac{n-m\cos\alpha}{\sqrt{(m^2n^2\sin^2\alpha+m^2+n^2-2mn\cos\alpha)}}+\mathrm{Arc\,sin}\frac{m-n\cos a}{\sqrt{m^2n^2\sin^2\alpha+m^2+n^2-2mn\cos\alpha}} \tag{۸}$$

۴ - حالت های خاص

از آنجا که رابطه شماره (۸)، در حالات خاص بشکل ساده تری تبدیل می شود، لذا مسئله برای مثلث قائم الزاویه و شکل مستطیلی تقسیم شده بدو مثلث قائم الزاویه نیز حل می گردد:

۴-۱ - حل مسئله برای مثلث قائم الزاویه $\alpha=\frac{\pi}{2}$

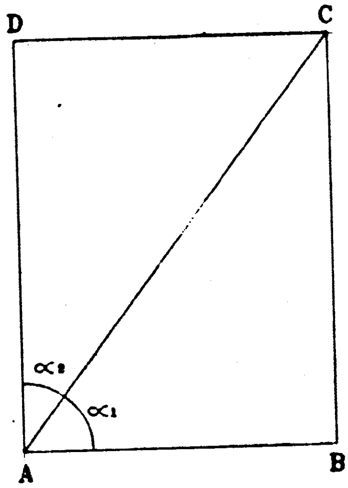
باتوجه به شکل شماره (۳)، و بازاء $\alpha=\frac{\pi}{2}$، رابطه شماره (۸) بصورت زیر درمیآید:

$$\sigma_z=\frac{q}{2\pi}\{\pi/2+\frac{m^2n^2}{m^2n^2+m^2+n^2}(\frac{n}{m\sqrt{(n^2+1)}}+\frac{m}{n\sqrt{(m^2+1)}})-(\mathrm{Arc\,sin}\frac{n}{\sqrt{(m^2+n^2+m^2n^2)}}+\mathrm{Arc\,sin}\frac{m^2}{\sqrt{(m^2+n^2+m^2n^2)}})\}$$

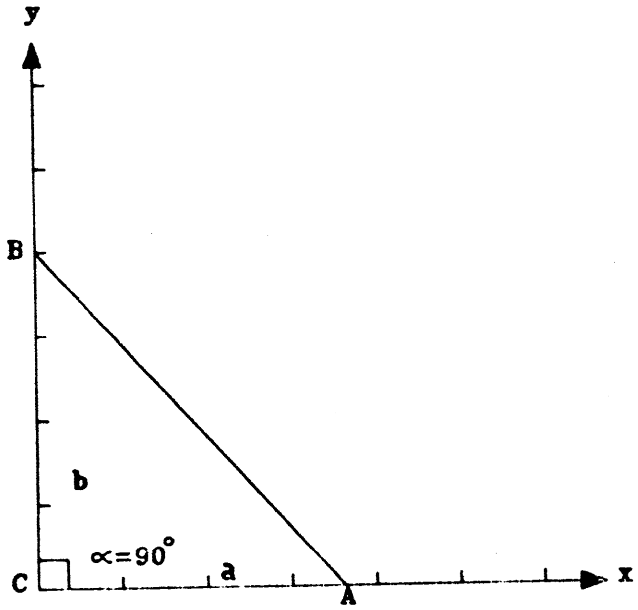
$$=\frac{q}{2\pi}\{\frac{m^2n^2}{m^2+n^2+m^2n^2}(\frac{n}{m\sqrt{(n^2+1)}}+\frac{m}{n\sqrt{(m^2+1)}})+\mathrm{Arc\,cos}\frac{m^2\sqrt{n^2+1}+n^2\sqrt{m^2+1}}{m^2+n^2+m^2n^2}=\frac{q}{2\pi}\{\frac{m^2n^2}{m^2n^2+m^2+n^2}(\frac{n}{m\sqrt{(n^2+1)}}+\frac{m}{n\sqrt{(m^2+1)}})+\mathrm{Arc\,sin}\frac{mn[\sqrt{(m^2+1)(n^2+1)}-1]}{m^2n^2+m^2+n^2}\} \tag{۹}$$

۴-۲ - حل مسئله برای شکل مستطیلی

برای محاسبه مؤلفه قائم تنش در زیر رأس A از مستطیل ABCD، و به اضلاع AB=a و BC=b، مطابق



شکل ۳: حالت خاص برای یک مثلث قائم الزاویه .



شکل ۴: حالت خاص برای یک شکل مستطیلی .

شکل شماره (۴)، با رسم قطر AC، مستطیل بدومثلث ABC و ACD تبدیل و مقدار تنش برای هر یک از مثلثها با استفاده از رابطه شماره (۸) محاسبه و با یکدیگر جمع می شود. برای حل مسئله در مثلث ABC، n به $\sqrt{m^2+n^2}$ تبدیل شده و فرض می گردد:

$$\cos_{\alpha} = \cos_{\alpha_1} = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

$$\sin_{\alpha_1} = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

در مثلث ACD نیز m به $\sqrt{m^2+n^2}$ تبدیل شده و فرض می شود:

$$\cos_{\alpha} = \cos_{\alpha_2} = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

$$\sin_{\alpha_2} = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

پس از انجام محاسبات و ساده کردن روابط ، معادله مربوطه در حالت عمومی بصورت زیر تبدیل می‌شود:

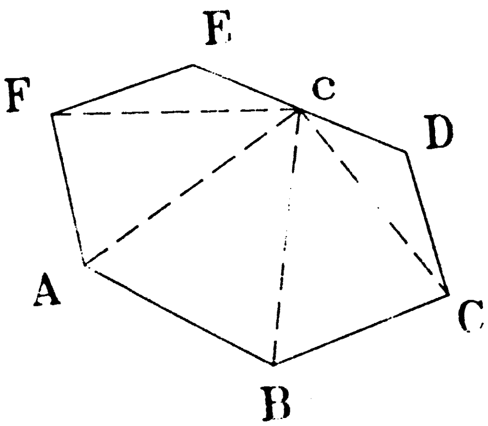
$$\sigma_z = (\sigma_z)_{ABC} + (\sigma_z)_{ACD} = \frac{q}{2\pi}\left\{\frac{mn(m^2+n^2+2)}{(m^2+1)(n^2+1)\sqrt{(m^2+n^2+1)}} + \mathrm{Arc\,sin}\frac{mn}{\sqrt{[m^2+1\ \ n^2+1]}}\right\} \qquad (۱۰)$$

۴-۳ - حل مسئله برای حالتی که نقطه در داخل شکل نباشد

در شرایطی که تصویر نقطه موردنظر برای محاسبه مؤلفه قائم تنش در داخل صفحه بارگذاری شده قرار نگیرد نیز می توان با اتصال نقطه به رئوس شکل و کسر اثر بارگذاری سطوح مثلثی مجازی از سطوح کل، مقدار تنش را محاسبه نمود.

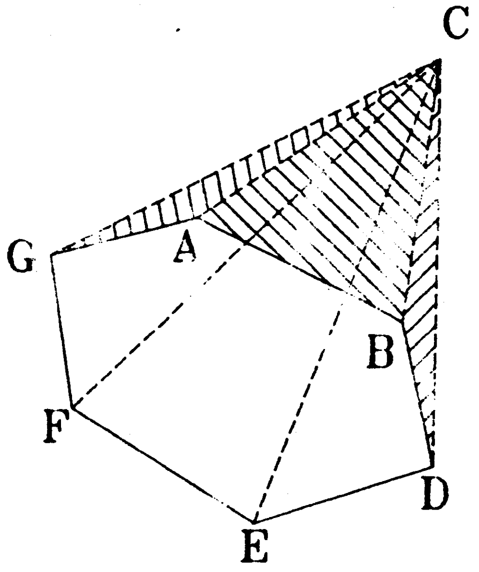
شکل های شماره (۵) و (۶) چگونگی حل مسئله را برای حالتهایی که نقطه روی ضلع یا خارج از آن قرار گرفته باشد نشان می‌دهند. بعنوان مثال در شکل شماره (۶) مقدار تنش قائم در زیر نقطه (C) بشرح زیر محاسبه می گردد:

$$\sigma_{ABDEFG} = \sigma_{GCF} + \sigma_{CFE} + \sigma_{CED} - \sigma_{CAG} - \sigma_{CAB} - \sigma_{CBD}$$



شکل ۵: نقطه روی ضلع شکل .

برای سایر شکلهای هندسی نامنظم نیز می توان متناسب با موقعیت نقطه موردنظر، از روش مشابه استفاده نمود.



شکل ۶: نقطه خارج از محیط شکل .

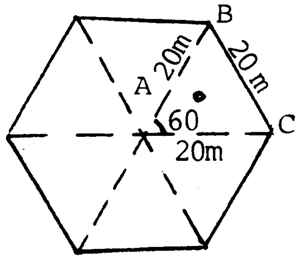
۵ - نمودارهای تعیین ضرایب توزیع تنش

بمنظور سهولت حل و استفاده از رابطه شماره (۸)، بااستفاده از یک برنامه کامپیوتری مناسب، معادله برای زوایای مختلف α از ۱۰ الی ۱۷۰ درجه حل گردیده و حل ترسیمی آن برای زوایای مختلف در شکل شماره (۷) نشان داده شده است . در این شکل در روی هریک از محورهای قائم و افقی بترتیب مقادیر $m=\frac{a}{z}$ و $n=\frac{b}{z}$ و یا بالعکس برده شده و مقدار قرائت شده روی منحنی ها، برابر q_0 می باشد که با قراردادن آن در رابطه زیر $\sigma_z = q \cdot q_0$ مقدار مؤلفه قائم تنش در نقطه موردنظر بدست خواهد آمد.

۶ - مثال عددی

به منظور آشنایی با روش محاسباتی و استفاده از نمودارهای تهیه شده در این قسمت یک مثال عددی طرح و با استفاده از فرمولهای به دست آمده و نمودارها حل می گردد.

مثال : ساختمان یک برج ۱۰ طبقه با شکل شش وجهی منظم روی یک دال بتن مسلح شش وجهی مطابق شکل زیر در سطح زمین استقرار می یابد. چنانچه مقدار کل بار وارده بر دال کف برابر ۱۵ تن در هرمتر مربع باشد، مقدار مؤلفه قائم تنش ایجاد شده در زیر مرکز پی (نقطه A) را در عمق ۱۰ متری تعیین کنید.



با توجه به شکل فوق برای تعیین مقدار تنش در مرکز سازه ، کافیست محاسبات برای یک قطعه ABC از شکل تعیین و نتیجه در ۶ ضرب شود. مثلث ABC یک مثلث متساوی اضلاع به ضلع ۲۰ متر و زاویه رأس ۶۰ درجه است . بنابراین محاسبات مربوط برای تعیین توزیع تنش در رأس مثلث ABC به شرح زیر می‌باشد:

$a = b = c = 20$ m

$\alpha = 60°$

$z = 10$ m

$$m = \frac{a}{z} = \frac{20}{10} = 2$$

$$n = \frac{b}{z} = \frac{20}{10} = 2$$

با استفاده از رابطه (۸)، مقدار تنش در عمق ۱۰ متری زیر رأس A برابر است با :

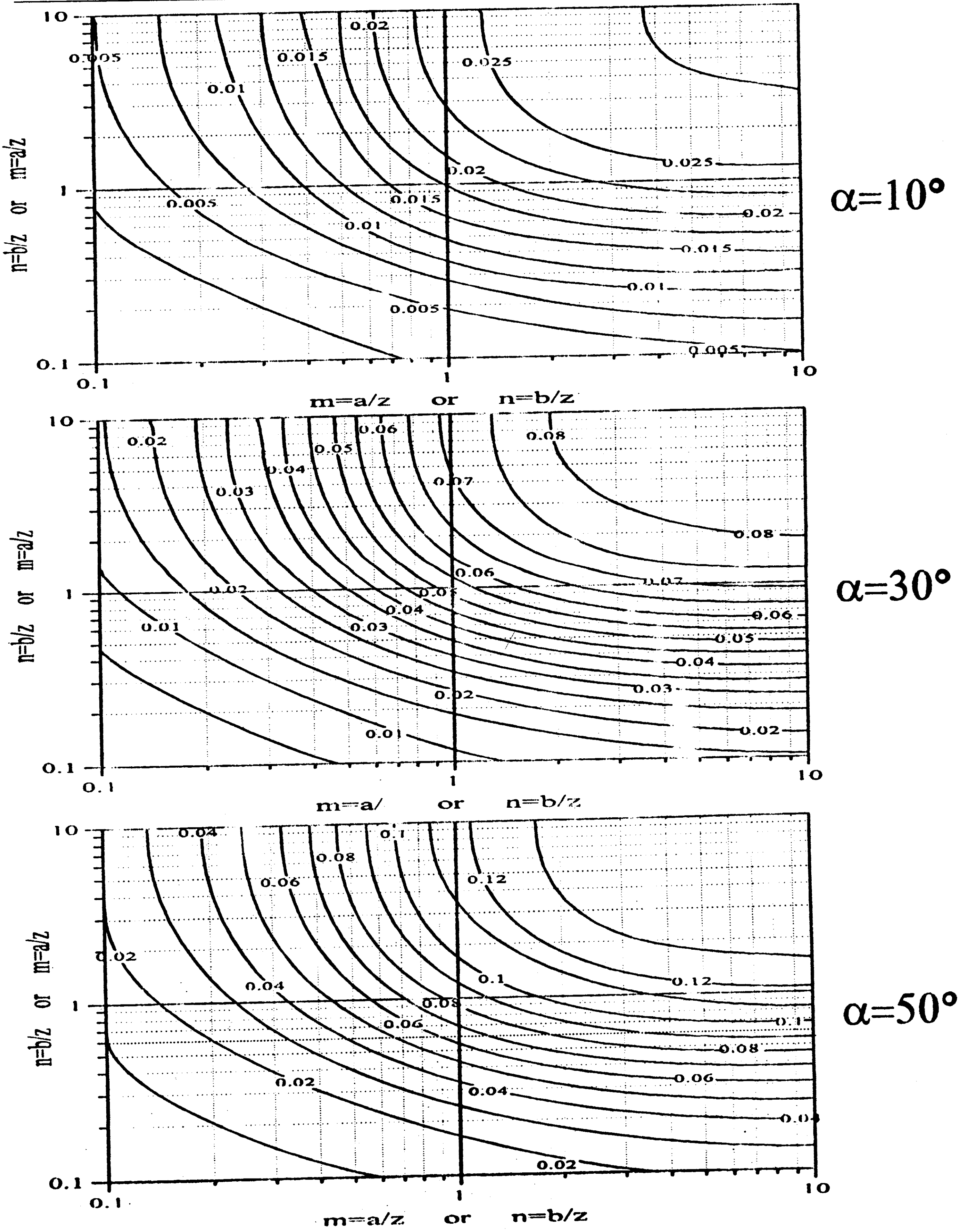
$$\sigma_z = q \cdot q_0$$

$$q_0 = \frac{1}{2\Pi}\left\{\frac{\Pi}{3} + \frac{4\times4\times\sqrt{3/2}}{16\times 3/4+4+4-2\times4\times 1/2}\left[\frac{2-2\times 1/2}{2\sqrt{5}} + \frac{2-2\times 1/2}{2\sqrt{5}}\right] - \left[\text{Arc sin}\,\frac{2-2\times 1/2}{\sqrt{16}} + \text{Arc sin}\,\frac{2-2\times 1/2}{\sqrt{16}}\right]\right\}$$

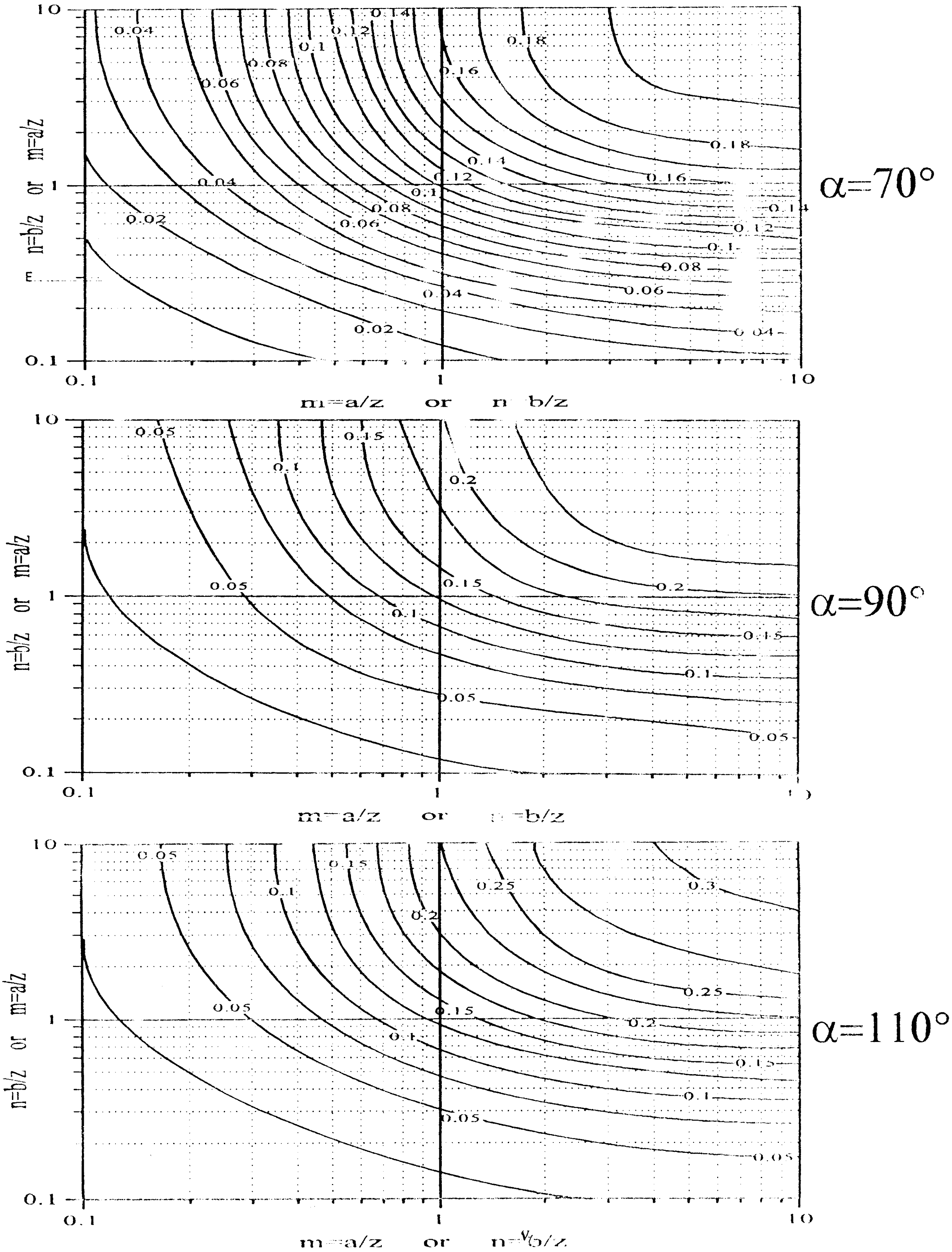
و یا

$$q_0 = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} - 2\,\text{Arc sin}\frac{1}{4}\right\}$$

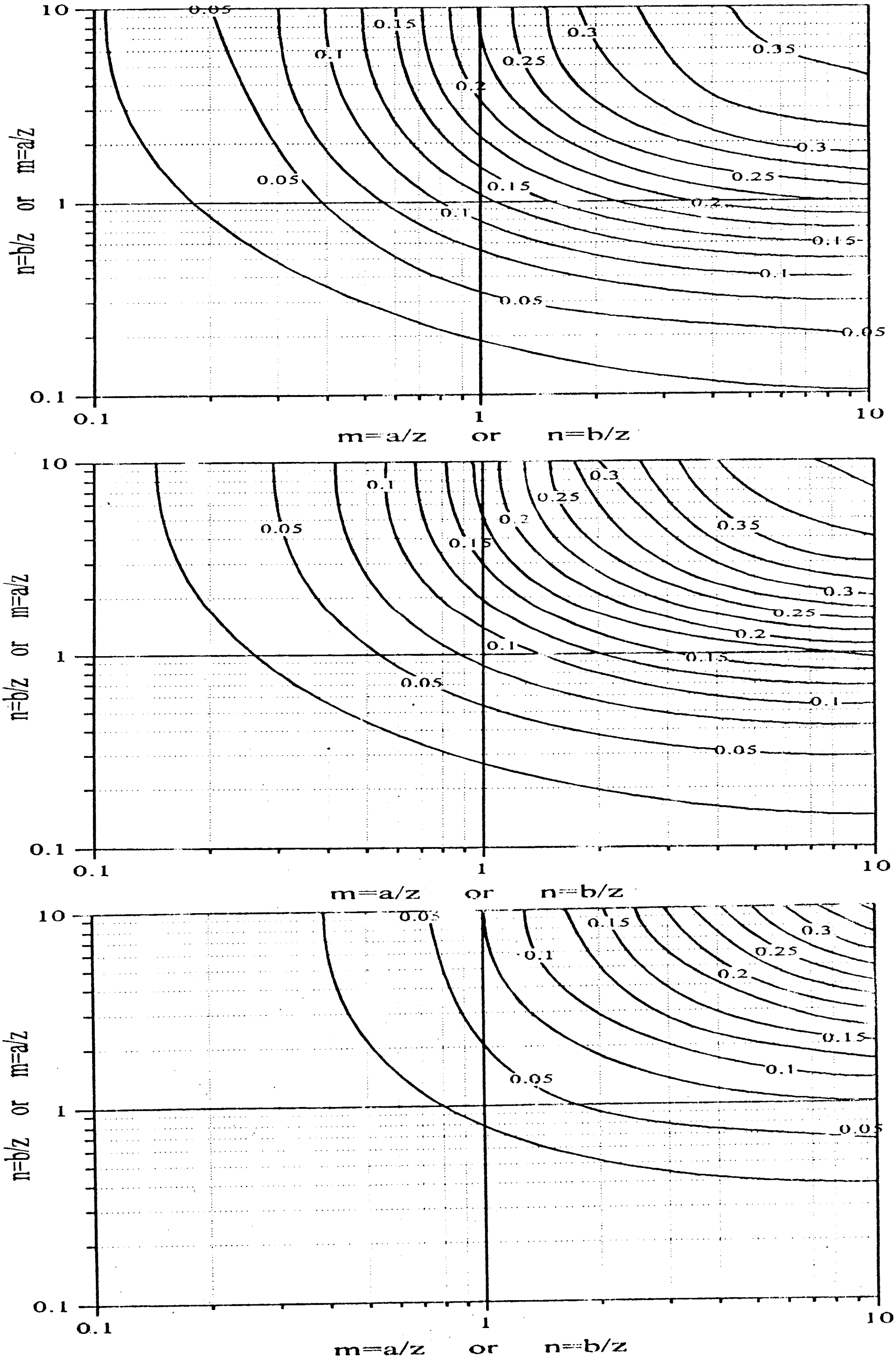
$$q_0 = 0.147$$



شکل ۷: (الف) نمودارهای توزیع تنش.



شکل ۷: (ب) نمودارهای توزیع تنش.



α=130°

α=150°

α=170°

شکل ۷: (ج) نمودارهای توزیع تنش .

چنانچه از نمودارهای مربوطه مقدار ضریب q برای زوایای ۵۰ و ۷۰ درجه به ازاء m=n=2 تعیین و سپس میانگین گیری شود، خواهیم داشت :

برای زاویه ۵۰ درجه $q_0 = 0.122$

برای زاویه ۷۰ درجه $q_0 = 0.167$

مقدار میانگین برای زاویه ۶۰ درجه $q_0 = 0.145$

همانطور که ملاحظه می شود ارقام محاسبه شده از طریق رابطه (۸) و نمودار بسیار نزدیک به یکدیگر هستند و اختلاف میان آنها (حدود0.002) مربوط به خطای قرائت نمودار است .

بدین ترتیب مقدار مؤلفه قائم تنش در عمق ۱۰ متری زیر مرکز سازه برابر است با :

$$\sigma_z = 6(q \cdot q_0)$$

$$\sigma_z = 6(15 \times 0.147) = 13.23 \text{ t/m}^2$$

۷ - مراجع

1 - Ahlvin, R. G., and Ulery, H. J.(1962). "Tabulated values for determining the complete pattern of stresses, strains and deflections beneath a uniform circular load on a homogeneous half space." *Highway research board, bull. No. 342.*

2 - Boussinesq, J.(1885). *Application des potentiels al etude de equilibre et du mouvement des solides elastiques.* Gauthier-Villars, Paris.

3 - Fadum, R. E.(1948). "Influence values for estimating stresses in elastic foundations." *2nd Int. conf. soil mech. Found. Eng.,* Vol. 3.

4 - Foster, C. R., and Ahlvin, R. G.(1945). "Stresses and deflections induced by a uniform circular load." *Proc. highw. res. board,* Vol. 33.

5 - Giroud, J. P.(1970). "Stresses under linearly loaded rectangular area." *ASCE J. soil mech. found. eng. div.,* Vol. 96, No. SM2.

6 - Gray, H., and Hooks, I. J.(1984). "Charts facilitate determination stresses under loaded areas." *Civ. Eng.* 18(6).

7 - Milovic, D. M., and Tournier,J. P.(1971). "Stresses and displacements due to rectangular load on a layer of finite thickness." *Soils found.* Vol. 11.

8 - Westergaard, H. M.(1938). "A problem of elasticity suggested by a problem in soil mechanics: A soft material reinforced by numerous strong horizontal sheets." *Mechanics of solids, S. Timoshenko,* 60th Anniversary Vol., Macmillan, New York.