پایداری سیستم های کنترل

غلامرضا شهریار حشمتی
دانشیار گروه علوم پایه مهندسی – پردیس دانشکده های فنی – دانشگاه تهران
بهمن مهری
استاد دانشکده ریاضی - دانشگاه صنعتی شریف

(تاریخ دریافت ۸۴/۱۱/۱۸ ، تاریخ تصویب ۸۵/۲/۹)

چکیده

در این مقاله، کنترل غیر مستقیم سیستم غیرخطی به صورت : $\frac{dx}{dt}=Ax-b\xi,\ \ \frac{d\xi}{dt}=f(\sigma),\ \ \sigma=c^Tx-\rho\xi$ را در نظر گرفته و با استفاده از روش لیاپونف[۱] و تابع لیاپونف، ابتدا پایداری سیستم را با بدست آوردن روابطی بین پارامترهای کنترل ثابت کرده و سپس با یک مثال روش خود را روشن ساخته ایم.

واژه های کلیدی : پایداری کنترل، تابع کنترل، پارامترهای کنترل، پایداری مجانبی، نظریه لیاپونف، قضیه سیلوستر[۲]

مقدمه

پایداری سیستمهای دینامیکی را می توان به دو روش پوانکاره[۳] و لیاپونف بدست آورد. ما در این مقاله از روش لیاپونف استفاده کرده ایم و بالاخره با یک مثال کاربردی مطلب فوق را روشن کرده ایم. همانطور که می دانیم در مورد کنترل خطی تحقیقات بسیاری انجام شده است ولی در مورد کنترل غیرخطی کارهای زیادی انجام نگرفته است. می توان این مقاله را نتیجه کوچکی از کارهائی که در آینده صورت خواهد گرفت در نظر گرفت.

پایداری

یکی از مسائل پایداری کنترل، مسئله ای است بصورت

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=Ax-b\xi\\ \dfrac{d\xi}{dt}=f(\sigma)\\ \sigma=c^Tx-\rho\xi\end{cases}$$

(۱)

که در آن A یک ماتریس $n\times n$ نامنفرد، x ، b و c در R^n و ρ,ξ و σ اسکالر می باشند. f تابع کنترل و b و c و ρ پارامترهای کنترل نامیده می شوند.

مسئله (۱) به کنترل غیرمستقیم موسوم است و هرگاه بجای معادله $\xi'=f(\sigma)$ رابطه ای بصورت $\xi=f(\sigma)$ درنظر گرفته شود، سیستم را کنترل مستقیم می نامند.
در ادامه فرض می شود که تابع کنترل f تابعی است پیوسته که در رابطه زیر صدق می کند،

$\sigma\neq 0$ به ازای هر $\sigma f(\sigma)>0$ و $f(0)=0$

(۲)

آنچه در این مقاله مورد بحث و تحقیق ما می باشد آن است که تحت چه شرایطی در مورد پارامترهای کنترل، سیستم ما پایدار می باشد، بدین معنی که اگر سیستم بدون کنترل یا سیستم اصلی، $\frac{dx}{dt}=Ax$ پایدار باشد، می خواهیم پارامترهای کنترل را طوری تعیین کنیم که پایداری افزایش یابد و اگر سیستم اصلی پایدار نباشد، پارامترهای کنترل را طوری تعیین می نمائیم که سیستم با کنترل پایدار شود.
برای این منظور، ابتدا سیستم را پایدار فرض می کنیم که نتیجه می دهد که قسمت حقیقی مقادیر ویژه A منفی می باشند.
واضح است که اگر، تبدیل

$$\begin{cases} y = Ax - b\xi \\ \sigma = c^T x - \rho\xi \end{cases}$$

(۳)

را انتخاب نمائیم، پایداری در صفحه (y,σ) ، پایداری سیستم را در صفحه (x,ξ) نتیجه می دهد، به شرط آنکه تبدیل فوق غیرتکین باشد و یا به عبارت دیگر

$$\det\begin{pmatrix} A & -b \\ c^T & -\rho \end{pmatrix} \neq 0$$

(۴)

ولی تساوی

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -b \\ c^T & -\rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -A^{-1}b \\ c^T & -\rho \end{pmatrix}$$

نشان می دهد که رابطه (۴) هم ارز است با رابطه

$$-\rho + c^T A^{-1} b \neq 0$$

یا

$$\rho \neq c^T A^{-1} b$$

(۵)

با مشتق گیری از رابطه (۳) بدست می آید،

$$\begin{cases} y' = Ax' - b\xi' \\ \sigma' = c^T x' - \rho\xi' \end{cases}$$

(۶)

رابطه (۶) نشان می دهد که پایداری دستگاه (۱) با شرط (۵) هم ارز است با پایداری دستگاه زیر،

$$\begin{cases} y' = Ay - bf(\sigma) \\ \sigma' = c^T y - \rho f(\sigma) \end{cases}$$

(۷)

برای پایداری مجانبی دستگاه (۷)، با استفاده از نظریه لیاپونف، از یک تابع لیاپونف استفاده می کنیم. طبق تعریف، تابع لیاپونف، تابعی است معین مثبت و اگر مشتق آن در امتداد مسیر دستگاه معین منفی باشد، آنگاه سیستم پایدار است.

تابع لیاپونف را بصورت زیر درنظر می گیریم،

$$V = y^T By + F(\sigma)$$

(۸)

که در آن B یک ماتریس متقارن معین مثبت است بطوری که $A^T B + BA$ معین منفی باشد

و $F(\sigma) = \int_0^\sigma f(\tau)d\tau$.

رابطه (۲) نتیجه می دهد $F(\sigma) > 0$ به ازای هر $\sigma \neq 0$ و در نتیجه V معین مثبت است.

برای پایداری مجانبی لازم است که مشتق V در امتداد مسیر معین منفی باشد.

با مشتق گیری از رابطه (۸) بدست می آید،

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{d}{dt}(y^T)By + y^T B\frac{dy}{dt} + \sigma' f(\sigma) \\ &= [y^T A^T - b^T f(\sigma)]By + \\ & y^T B[Ay - bf(\sigma)] + [c^T y - \rho f(\sigma)]f(\sigma) \\ &= y^T(A^T B + BA)y - b^T f(\sigma)]By - \\ & y^T Bbf(\sigma) + c^T yf(\sigma)] - \rho f^2(\sigma). \end{aligned}$$

قرار دهیم $A^T B + BA = -P$ ، در این صورت، باتوجه به آنکه $b^T By = y^T Bb$ ، داریم :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -y^T Py - 2(Bb - \frac{c}{2})^T yf(\sigma) - \rho f^2(\sigma) \\ &= y^T Py - 2dyf(\sigma) - \rho f^2(\sigma) \end{aligned}$$

که در آن $d = (Bb - \frac{c}{2})^T$

حال نشان دهیم که

$$y^T Py - 2dyf(\sigma) + \rho f^2(\sigma) > 0$$

(۹)

به ازای هر $y \neq 0$ و هر f .

باتوجه به آنکه P یک ماتریس معین مثبت است، با استفاده از قضیه سیلوستر کافی است نشان دهیم

$$\det\begin{pmatrix} P & d^T \\ d & \rho \end{pmatrix} > 0$$

و

$$\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & d^T \\ d & \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & P^{-1}d \\ d & \rho \end{pmatrix}$$

بنابراین، برای برقراری رابطه (۹) کافی است داشته باشیم

$$\rho - dP^{-1}d^T > 0$$

(۱۰)

یا

$$\rho > dP^{-1}d^T$$

در نتیجه اگر روابط (۵) و (۱۰) برقرار باشند، دستگاه (۱) بطور مجانبی پایدار است.

حال نشان دهیم که روابط (۵) و (۱۰) از یکدیگر مستقل نمی باشند. برای نشان دادن این مطلب کافی است نشان دهیم :

$$dP^{-1}d^T \geq c^T A^{-1} b$$

(۱۱)

برای اثبات نامساوی (۱۱) کافی است نشان دهیم که برای هر دو بردار x و y داریم :

$$(Bx - y)^T P^{-1}(Bx - y) \geq 2y^T A^{-1} x$$

(۱۲)

زیرا در این صورت با انتخاب x=b و $y = \frac{1}{2}c$ خواهیم داشت :

$$(Bx - y)^T = (Bb - \frac{c}{2})^T = d$$

و رابطه (۱۱) نتیجه می شود.

برای اثبات نامساوی (۱۲)، فرض کنیم Q ماتریس وارون پذیری باشد بطوریکه

$$Q + Q^T > 0.$$

(۱۳)

برای هر بردار u در R^n ، چون $u^T Q u$ یک ماتریس ۱*۱ است، داریم

$$u^T Q u = (u^T Q u)^T = u^T Q^T u$$

و بنابراین،

$$(۱۴)\; u^T Q u = \frac{1}{2} u^T (Q + Q)^T u > 0 \quad , \quad \forall u \neq 0$$

چون $u \neq 0$ نتیجه می دهد $Q^{-1}u \neq 0$ ، از رابطه (۱۴) نتیجه می شود.

$$u^T (Q^{-1})^T Q (Q^{-1}u) =$$
$$u^T (Q^{-1})^T u > 0 \quad , \quad \forall u \neq 0$$

(۱۵)

حال قرار دهیم :

$$\alpha = (u^T + v^T)(Q + Q^T)(u + v)$$
$$- 2u^T (Q + Q^T) Q^{-1} (Q + Q^T) V$$
$$\beta = 2(u^T Q^T - v^T Q) Q^{-1} (Qu - Q^T v) > 0$$

(۱۶)

با بسط αو β بدست می آید $\alpha = \beta$ که نتیجه می دهد $\alpha > 0$ و نامساوی (۱۲) از آن نتیجه می شود، زیرا با قراردادن u و v به ترتیب به جای $(Q + Q^T)^{-1}u$ و $(Q + Q^T)^{-1}v$ بدست می آید،

$$(u^T + v^T)(Q + Q^T)^{-1}(u + v) -$$
$$2u^T Q^{-1} v > 0$$

حال اگر قرار دهیم Q=-BA ، u=-y و v=Bx ، نامساوی (۱۲) حاصل می شود.

مثال ۱

سیستم معـــــادله دیفرانسیل زیر را درنظر می گیریم:

$$\begin{cases} T^2 \ddot{\eta} + U\dot{\eta} + K\eta = T^2 \zeta \\ \dot{\zeta} = \phi(\sigma) \\ \sigma = \sigma\eta + E\dot{\eta} + G^2 \ddot{\eta} - \frac{1}{\ell}\zeta \end{cases}$$

(۱۶)

که در آن U, K, G^2, T^2 و K ضرایب ثابت و U و K اعدادی مثبت اند. باتوجه به رابطه (۱۶)، با حذف $\ddot{\eta}$ ، داریم :

$$\sigma = (a - \frac{KG^2}{T^2})\eta + (E - \frac{G^2 U}{T^2})\eta - \rho\zeta,$$

(۱۷)

که در آن $\rho = \frac{1}{\ell} - G^2$

می دانیم در کنترل غیرمستقیم باید $\rho > 0$ اختیار شود بنابراین :

$$\frac{1}{\ell} > G^2$$

(۱۸)

اکنون می توان سیستم (۱۶) را با تغییر متغیر به شکل استاندارد زیر نوشت :

$$\begin{cases}\ddot{\zeta}+\alpha_1\dot{\zeta}+\alpha_2\zeta=\phi(\sigma)\\ \dot{\sigma}=\gamma_2\zeta+\gamma_1\dot{\zeta}-\rho\phi(\sigma)\end{cases}$$

(۱۹)

که در آن

$$\begin{cases}\alpha_1=\dfrac{U}{T^2},\alpha_2=\dfrac{K}{T^2}\\ \gamma_1=E-\dfrac{G^2U}{T^2},\gamma_2=a-\dfrac{KG^2}{T^2}\end{cases}$$

(۲۰)

حال فرض کنید $y_1=\zeta$ و $y_2=\dot{\zeta}$ ، در این صورت

$$\dot{y}_1=\dot{\zeta}=y_2,\dot{y}_2=\ddot{\zeta}=-\alpha_1y_2-\alpha_2y_1+\phi(\sigma)$$

(۲۱)

بنابراین :

$$\begin{bmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\alpha_2 & -\alpha_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}\phi(\sigma)$$

(۲۲)

روابط (۱۹) و (۲۱) نتیجه می دهد :

$$\dot{\sigma}=\begin{bmatrix}\gamma_2\\ \gamma_1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}-\rho\phi(\sigma)$$

(۲۳)

در ادامه با فرض

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\alpha_2 & -\alpha_1\end{bmatrix},Y=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix},$$

$$b=\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix},c=\begin{bmatrix}\gamma_2\\ \gamma_1\end{bmatrix}$$

به سیستم ماتریسی زیر خواهیم رسید :

$$\begin{cases}\dot{Y}=AY-b\phi(\sigma)\\ \dot{\sigma}=c^TY-\rho\phi(\sigma)\end{cases}$$

(۲۴)

برای بررسی پایداری سیستم (۲۴) از روش لیاپونف استفاده می کنیم. برای این منظور فرض می کنیم B یک ماتریس مثبت متقارن و نیز P یک ماتریس مثبت باشد به طوریکه :

$$A^TB+BA=-P$$

(۲۵)

با فرض $d=(Bd-\frac{1}{2}c)^T$ شرایط پایداری (۲۴) عبارت است از : $\rho>dP^{-1}d^T$.

اگر قرار دهیم

$$B=\begin{bmatrix}p_\circ & q_\circ\\ q_\circ & r_\circ\end{bmatrix},P=\begin{bmatrix}p & q\\ q & r\end{bmatrix}$$

(۲۶)

برای برقراری شرایط مثبت بودن P باید داشته باشیم :

$$p>0,pr-q^2>0$$

(۲۷)

از روابط (۲۵) و (۲۶) داریم :

$$\begin{bmatrix}-2\alpha_2q_\circ & p_\circ-\alpha_1q_\circ-\alpha_2r_\circ\\ p_\circ-\alpha_1q_\circ-\alpha_2r_\circ & 2(q_\circ-\alpha_1r_\circ)\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}p & q\\ q & r\end{bmatrix}$$

یا

$$\begin{cases}p=2\alpha_2q_\circ\\ q=\alpha_1q_\circ+\alpha_2r_\circ-p_\circ\\ r=2(\alpha_1r_\circ-q_\circ)\end{cases}$$

(۲۸)

برای برقراری شرط $\rho>dP^{-1}d^T$ کافی است $d=\cdot$ اختیار شود

$$-d=\begin{bmatrix}q_\circ+\frac{1}{2}\gamma_2\\ r_\circ+\frac{1}{2}\gamma_1\end{bmatrix}^T$$

چون دترمینان ضرایب دستگاه معادلات (۲۸) بزرگتر از صفر است لذا دستگاه بالا دارای جواب منحصر بفرد برای $r_\circ$, $q_\circ$, $p_\circ$ می باشد داریم :

$$q_\circ=\frac{p}{2\alpha_2},r_\circ=\frac{r}{2\alpha_1}+\frac{p}{2\alpha_1\alpha_2}$$

بنابراین :

$$-2d=\begin{bmatrix}\dfrac{p}{\alpha_2}+\gamma_2\\ \dfrac{r}{\alpha_1}+\dfrac{p}{\alpha_1\alpha_2}+\gamma_1\end{bmatrix}^T$$

و باتوجه به $d=\cdot$ خواهیم داشت :

$$\begin{cases}p+\alpha_2\gamma_2=0\\ p+r\alpha_2+\alpha_1\alpha_2\gamma_1=0\end{cases}$$

(۲۹)

اولین رابطه نتیجه می دهد :

$$\gamma_2 < 0$$

و چون r>۰ از دومین رابطه نتیجه می شود :

$$\gamma_1 < 0$$

با حذف p بین دو رابطه (۲۹) خواهیم داشت :

$$r = \gamma_2 - \alpha_1\gamma_1$$

و چون r>۰ بنابراین

$$\gamma_2 > \gamma_1\alpha_1$$

از رابطه $\gamma_1 < 0$ نتیجه می گیریم

$$E < \frac{G^2U}{T^2}$$

(۳۰)

و از رابطه $\gamma_2 < 0$ نتیجه می گیریم:

$$a < \frac{G^2K}{T^2}$$

(۳۱)

و باتوجه به اینکه $\alpha_1\gamma_1 < \gamma_2$ خواهیم داشت :

$$0 < \frac{G^2K}{T^2} - a < \frac{U}{T^2}\left(\frac{G^2U}{T^2} - E\right)$$

(۳۲)

روابط (۳۰)، (۳۱) و (۳۲) شرط کافی پایداری را نتیجه خواهند داد.

مثال ۲

مدار RLC دلخواهی را در نظر می گیریم سپس با قرار دادن کنترل مناسب شرط کافی برای پایداری سیستم فوق را بدست می آوریم، می دانیم :

$$\frac{d^2(Lq)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{d(Lq)}{dt} + \frac{Lq}{Lc} = v(t)$$

فرض کنیم $v(t) = \xi(t)$ و اگر قرار دهیم $\xi'(t) = \phi(\sigma)$ با مدلسازی از سیستم (۱۶) خواهیم داشت :

$$\frac{d^2(Lq)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{d(Lq)}{dt} + \frac{Lq}{Lc} = v(t) = \xi(t)$$

$$\xi'(t) = \phi(\sigma)$$

$$\sigma = a(Lq) + E(Lq)' + G^2(Lq)'' - \frac{1}{1}\xi(t)$$

برای راحتی فرض می کنیم : f=Lq لذا خواهیم داشت :

$$f' + \frac{R}{L}f' + \frac{f}{Lc} = v(t)$$

$$v'(t) = \phi(\sigma$$

$$\sigma = af + Ef' + G^2f' - \frac{1}{L}v(t)$$

حال بنابر (۳۰) ، (۳۱) و (۳۲) و با فرض $U = \frac{R}{L}$ ، $k = \frac{1}{Lc}$ و $T^2 = 1$ شرایط کافی برای پایداری سیستم فوق عبارتست از :

$$E < G^2\frac{R}{L} \quad , \quad a < \frac{G^2}{Lc}$$

$$0 < \frac{G^2}{Lc} - a < \frac{R}{L}\left(\frac{G^2R}{L} - E\right)$$

نتیجه گیری

با استفاده از تابع لیاپونف توانستیم پایداری سیستم فوق را ثابت کنیم.

تقدیر و تشکر

این مقاله تحقیقی، مستخرج از طرح پژوهشی شماره ۶۱۱/۳/۶۹۴ ، با پشتیبانی مالی و معنوی دانشکده فنی دانشگاه تهران میسر گردید. لذا، لازم می دانیم که از مسئولین محترم پردیس دانشکده های فنی و معاونت محترم پژوهشی دانشگاه تهران تشکر و قدردانی نمائیم.

مراجع

1 - Lefschetz, S. (1965). *Stability of nonlinear control systems*, Academic Press, New York.

2 - Barnett, S. and Cameron, R. G. (1984). *Introduction to mathematical control theory*, Clarendon Press Oxford.

3 - Sanchez, D. A. *Ordinary Differential Equation and Stability Theory*.

4 - Gamrelidze, R. V. (1978). *Principles of optimal control,* Plenum Press, New York.

5 - Hocking, L. (1991). *Optimal control an introduction to the theory with applications.* Oxford University Press.

6 - Young, L. C. (1969). *Lectures on the calculus of variations and optimal control theory,* W. B. Saunders, Philadelphia.

7 - Logemann, H. (1991). "Multivariable feedback design." *Automatica,* Vol. 27, No. 5, PP. 889-891.

8 - Jacobs, O.L.R. (1993). *Introduction to control theory*. Oxford Science Publications.

9 - Klous Deimling (1985). *Nonlinear functional analysis*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo.

واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1 - Liapounov
2 - Sylvester
3 - Poincare