برنامه ریزی حرکت قطارها در خطوط یک خطه

محمد مهدی سپهری

استادیار بخش مهندسی صنایع - دانشکده فنی و مهندسی - دانشگاه تربیت مدرس

محسن پورسیدآقایی

دانشجوی دکترای مهندسی صنایع - دانشکده فنی و مهندسی - دانشگاه تربیت مدرس

(تاریخ دریافت ۷۷/۸/۹، تاریخ تصویب ۷۸/۲/۱۱)

چکیده

یکی ازمسائل مهم راه آهنها برنامه ریزی حرکت قطارها بخصوص قطارهای مسافری است که بوسیله ترسیم یک گراف مادر انجام میشود. در این گراف، که در واقع یک نمودار زمان- فاصله است و معمولاً توسط افراد باتجربه ترسیم می شود، زمان شروع حرکت و رسیدن قطارها به ایستگاههای بین راه و توقفهای لازم در ایستگاهها بعلاوه محل تلاقی با سایر قطارها که از روبرو درحال حرکت هستند نشان داده میشود.

در این مقاله ابتدا یک مدل ریاضی مخلوط صفر و یک[1] برای بدست آوردن گراف مادر بهینه درخطوط یک خطه ارائه گردیده است. سپس، با توجه به ساختار مدل و فرضیات مسأله سعی گردیده تا با استفاده از روشهای مختلفی از جمله تولید محدودیت[2]، نامساویهای معتبر[3]، کوچک کردن ابعاد مسأله و استفاده از یک روش ابتکاری برای یافتن یک حد بالای مؤثر، با استفاده از نرم افزار Cplex 5.0، مدل مزبور در ابعاد واقعی حل گردد. نتایج محاسبات روش بهینه و یک روش ابتکاری ارائه شده برای ده مسأله متنوع نیز گزارش شده است.

کلیدواژه ها: برنامه ریزی صفر-یک، زمانبندی قطار، بهینه یابی، نامساویهای معتبر

مقدمه

مسائل برنامه ریزی و زمانبندی حرکت قطارها را می توان از دو دیدگاه مورد ارزیابی قرار داد ، یک دسته مدلهایی که در پی ایجاد یک برنامه مادر برای حرکت قطارها می باشند و دسته دوم مدلهایی هستند که در پی بهبود این برنامه ها هنگام مواجهه با اختلالات ناشی ازخرابیها ویا اضافه وکم شدن تعدادی از قطارها تدوین شده اند.

با توجه به اینکه ما در این مقاله در پی ایجاد یک برنامه مادر برای حرکت قطارها و زمانبندی آنها در شبکه هستیم ، بیشتر از این دیدگاه تحقیقات قبلی را مورد بررسی قرار می دهیم و در مورد دسته دوم نیز به تحقیقاتی که ارتباط نزدیکی به مدلهای دسته اول دارند اشاره خواهیم نمود. در این رابطه، تقریباً اولین کار توسط Szpigle [۱] صورت گرفته است . وی براساس مسأله برنامه ریزی ماشین آلات ، مسأله برنامه ریزی حرکت قطارها را بصورت یک مدل برنامه ریزی خطی با فرض زمانهای شروع ثابت و در نظرگرفتن حداکثر سرعت برای قطارها مدلسازی نموده و سپس توسط روش شاخه و حد، مسأله را برای ۱۰ قطار و ۵ بلاک حل کرده است.

Mees و Goh [۲] استفاده از مفاهیم شبکه راجهت مدلسازی مسأله پیشنهاد نموده اند به اینصورت که کمانها بیانگر بلاکها وگره ها نشاندهنده ایستگاهها هستند. دراین مدل زمان بصورت پیوسته درنظرگرفته شده و نتیجه حاصل بصورت یک شبکه پویا است.

همچنین، Mees [۳] استفاده از مسأله تخصیص منابع را مد نظر قرار داده است، به اینصورت که بلاکهای راه آهن بعنوان منابع در نظر گرفته شده و در زمانهای موردنظر به قطارها تخصیص می یابند. دراین

---

1 – Mixed zero-one 2 – Constraint generation 3 – Valid inequalities

مدل فرض شده است که برنامه ریزی بروی یک شبکه تک خطه برای یک دوره زمانی مشخصی صورت می گیرد و زمان شروع حرکت قطارها نیز ثابت است. مدل ریاضی مربوطه بصورت یک مسأله بهینه سازی شبکه با متغیرهای صفرویک تعریف شده و برای حل آن یک الگوریتم تخمینی با استفاده از مسأله جریان چند کالایی پیشنهاد شده است.

Mills و همکاران [۴] نیز از مفاهیم شبکه استفاده کرده و حرکت قطارهای باری را به روی شبکه های تک خطه راه آهن مدل سازی نموده اند. مدل حاصله یک مسأله برنامه ریزی غیرخطی با هدف حداقل کردن هزینه های سراسری دیرکرد قطارها و هزینه های سوخت آنها است. لازم به ذکر است که مدل فوق جهت مسائل حین کار و با فرض سرعت متغیر قطارها ارائه شده است .

Araya و همکاران [۵] مسأله زمان بندی بهینه قطارها را برای مسائل حین کار مد نظر قرار داده و آن را به صورت یک مدل برنامه ریزی متغیرهای عدد صحیح مخلوط مدل سازی نموده اند. مدل ارائه شده برای یک شبکه دو خطه متشکل از دو نوع قطار عادی و سریع با فرض سبقت مجاز و زمان شروع حرکت ثابت برای قطارها مورد بررسی قرار گرفته است. برای حل آن ابتدا توسط یک روش ابتکاری، حد اولیه ای برای جوابها محاسبه شده و سپس توسط روش شاخه وحد جواب قبلی بهینه گشته است. لازم به ذکر است که در این مدل به دلیل دوخطه بودن مسیر بحث تلاقی قطارها مورد بررسی قرار نگرفته است.

Kraay و همکاران [۶] با هدف حداقل کردن مصرف سوخت وهمچنین تأخیر قطارها، یک مدل برنامه ریزی غیرخطی محدب به همراه متغیر های مخلوط صفرویک ارائه نموده اند. متغیرهای اصلی مدل شامل میزان سرعت قطارها در بلاکهای مختلف و همچنین تعیین زمان سبقت قطارها از یکدیگر هستند. محدودیتهای مسأله نیز شامل جدول زمانی ارائه شده (زمان شروع حرکت ثابت) ، محدودیتهای حداقل وحداکثر سرعت در بلاکها ومحدودیتهای تلاقی هستند. برای حل مسأله نیز از یک روش عددی ضمنی استفاده شده است، بطوریکه در هر مرحله متغیرهای صفرویک نادیده گرفته شده و تابع هدف بصورت خطی تخمین زده می شود.

Cai و Goh [۷] مسأله زمانبندی حرکت قطارها را برای یک شبکه تک خطه با فرض زمان شروع ثابت وعدم وجود سبقت بصورت یک مدل برنامه ریزی متغیرهای عدد صحیح ارائه نموده اند. آنها برای حل مسأله از تصمیم گیری محلی جهت تلاقی ها استفاده کرده وجواب بهینه محلی را برای آن بدست آورده اند.

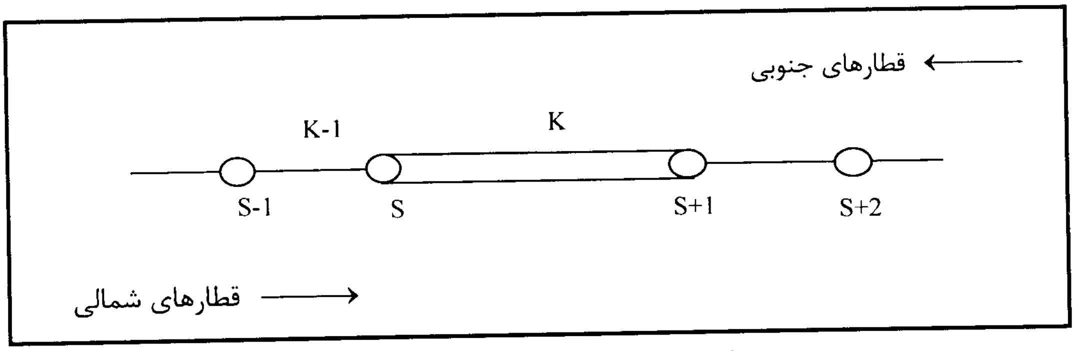
Higgins و همکاران [۸] نیز مسأله زمانبندی حرکت قطارها را بصورت یک مدل برنامه ریزی متغیرهای عدد صحیح با تابع هدف حداقل کردن مجموع تأخیرات و هزینه قطارها در شبکه ارائه نمودهاند. در این مدل فرض شده است که زمان شروع حرکت قطارها ثابت وسرعت آنها در طول مسیر متغیر است، همچنین برنامه‌ریزی بروی یک شبکه یک‌خطه صورت می‌گیرد. جهت حل مدل یک روش ابتکاری ارائه شده است.

در این روش تلاقی ها بصورت محلی بررسی شده و به ازای هر جواب آن، مدل برنامه ریزی خطی پیوسته‌ای جهت تعیین میزان هزینه مربوط حل میشود و در نهایت جواب با کمترین هزینه بعنوان یک راه حل موجه انتخاب می گردد. نتیجه روش ابتکاری این است که یک حد پایین را برای مسأله بدست می دهد که در مرحله بعدی با استفاده از این حد پایین و روش شاخه و حد میتوان جواب بهینه مسأله را محاسبه نمود .

مدل ریاضی

در مورد مدل ریاضی مسأله زمانبندی حرکت قطارها تا کنون مقالات متعددی با در نظر گرفتن فرضیات مختلف نوشته شده است، اما هنوز یک مدل جامع که در ابعاد واقعی و در زمان قابل قبول بصورت بهینه حل گردد ارائه نگردیده است.

مدل ارائه شده در این بخش یک مدل متغیرهای عدد صحیح مخلوط است که با توجه به فرضیات نوشته شده در زیر بخش بعدی دارای کاربردهای خاصی است، اما نحوه نگرش به موضوع که ناشی از تجارب نویسندگان مقاله در مورد زمانبندی حرکت قطارها در راه آهن جمهوری اسلامی ایران است باعث گردیده تا این مسأله



شکل ۱: قسمتی از یک شبکه راه آهن.

به نحوی مدلسازی شود که تعداد متغیرهای صفرویک بکار گرفته شده در آن بسیار کمتر از سایر مدلهای مشابه باشد. بعلاوه در نظر گرفتن زمان شروع متغیر برای حرکت قطارها برای اولین بار در چنین مدلهایی آورده شده است که موجب تغییر کلی در مسأله و روشهای حل آن گردیده بنحوی که هیچیک از روشهای حل پیشنهادی در مقالات گذشته قابل کاربرد نیستند.

معرفی متغیرها و فرضیات مسأله

قطارها بصورت دو دسته قطارهای جنوبی $I = \{1, \ldots, m\}$ و قطارهای شمالی $J = \{1, \ldots, n\}$ در نظر گرفته می شوند. کل مسیر $\{P\}$ نیز به دو بخش خطوط یک خطه $[P_1]$ و دو خطه $[P_2]$ تقسیم بندی می گردد، یعنی $P = \{P_1, P_2\}$. تمام ایستگاهها نیز در مجموعه S جای گرفته اند، $S = \{1, \ldots, S_N\}$، و به ترتیب از پایین ترین ایستگاه (جنوبی ترین ایستگاه) به بالا شماره گذاری می گردد. فاصله بین دو ایستگاه مجاور را یک بلاک می نامند که به نام ایستگاه پایینی (جنوبی) آن نامیده و با حرف k نشان داده می شود.

متغیرهای صفرویک برای تعیین اینکه در هنگام تلاقی کدام قطار ابتدا بلاک مورد نظر را اشغال می نماید بصورت زیر تعریف شده اند :

$$y_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{قطار جنوبی } i \in I \text{ زودتر از قطار شمالی } j \in J \text{ از بلاک } k \in P_1 \text{ عبور نماید} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

متغیرهای مسأله بصورت زمان رسیدن و حرکت قطارها از ایستگاهها بصورت زیر تعریف شده اند:

زمان رسیدن قطار جنوبی $i \in I$ از ایستگاه $s \in S$ — $AS_{i,s}$

زمان حرکت قطار جنوبی $i \in I$ از ایستگاه $s \in S$ — $DS_{i,s}$

زمان رسیدن قطار شمالی $j \in J$ به ایستگاه $s \in S$ — $AN_{j,s}$

زمان حرکت قطار شمالی $j \in J$ از ایستگاه $s \in S$ — $DN_{j,s}$

و اطلاعات زیر بعنوان داده های اولیه مسأله تعریف شده است.

زودترین زمان عبور قطارهای جنوبی از بلاک $k \in P$ — $EPTS_{i,k}$

دیرترین زمان عبور قطارهای جنوبی از بلاک $k \in P$ — $LPTS_{i,k}$

زودترین زمان عبور قطارهای شمالی از بلاک $k \in P$ — $EPTN_{j,k}$

دیرترین زمان عبور قطارهای شمالی از بلاک $k \in P$ — $LPTN_{j,k}$

زمان توقف برنامه ریزی شده قطار جنوبی $i \in I$ در ایستگاه S — $STS_{i,s}$

زمان توقف برنامه ریزی شده قطار شمالی $j \in J$ در ایستگاه S — $STN_{j,s}$

زودترین ترین زمان ممکن برای حرکت قطار جنوبی $i \in I$ از ایستگاه مبدأ — $ESTS_i$

دیرترین زمان ممکن برای حرکت قطار جنوبی $i \in I$ از ایستگاه مبدأ — $LSTS_i$

زودترین زمان ممکن برای حرکت قطار شمالی $j \in J$ از ایستگاه مبدأ — $ESTN_j$

دیرترین زمان ممکن برای حرکت قطارشمالی $j \in J$ از ایستگاه مبدأ — $LSTN_j$

حداکثر طول زمان سفر قطار جنوبی $i \in I$ از مبدأ تا مقصد — $MTTS_i$

حداکثر طول زمان سفر
قطار شمالی $j \in J$ از مبدأ تا مقصد $MTTN_j$
ضریب جریمه تأخیر قطار i در تابع هدف WS_i
ضریب جریمه تأخیر قطار j در تابع هدف WN_j

بعلاوه، برای تجسم بهتر، در شکل ۱ قسمتی از یک شبکه راه آهن بهمراه جهت حرکت قطارها و بلاکهای یک خطه و دو خطه نشان داده شده است. همچنین، فرضیات زیر در مدل در نظر گرفته شده اند:

۱- زمان شروع حرکت قطارها از مبدأ یک متغیر تصمیم گیری است.

۲- تلاقی قطارها تنها در ایستگاهها و بلاکهای دو خطه مجاز است.

۳- سبقت قطارها از یکدیگر مجاز نیست.

۴- در هر لحظه تنها یک قطار می تواند در داخل یک بلاک باشد؛ بعبارت دیگر قطارها نمی توانند در داخل یک بلاک به دنبال هم بروند .

۵- چون زمان عبور قطارها از هر بلاک با توجه به شیب و فراز و مشخصات هندسی خط در هر مسیر است و بستگی به تجربه لکوموتیورانان دارد، حداکثر و حداقل سرعت مجاز مقدار متغیری است.

تابع هدف و محدودیتها

تابع هدف مورد استفاده در این مسأله بصورت زیر تعریف شده است :

"می نیمم مجموع زمان سفر قطارها ضربدر ضریب جریمه تأخیر به اضافه مجموع توقفهای هر قطار "

$$\begin{aligned} \text{Min } Z = & \sum_i WS_i (AS_{i,1} - DS_{i,S_N}) + \\ & \sum_j WN_j (AN_{j,S_N} - DN_{j,1}) + \\ & \sum_i \sum_k \left(DS_{i,k} - AS_{i,k}\right) + \\ & \sum_j \sum_k \left(DN_{j,k} - AN_{j,k}\right) \end{aligned} \qquad (۱)$$

قسمت اول این تابع هدف باعث می شود که مجموع زمان سفرقطار ها با در نظرگرفتن ضریب اهمیت هر قطار حداقل شود و قسمت دوم تابع هدف باعث می شود تا مدل از حرکت سریع قطارها وسپس توقف آنها در ایستگاهها جلوگیری نماید؛ زیرا اگربنا باشد که حرکت سریعتر یک قطار در مجموع زمان سفر آن اثری نداشته باشد بهتر است که بجای توقفهای مکرر در ایستگاهها کمی آهسته تر حرکت کند (تا آنجا که سایر محدودیتها اجازه می دهند).

در مدلهای سنتی برنامه ریزی حرکت قطارها، زمان شروع حرکت از مبدأ ثابت و بخشی از داده های اولیه مدل است، در حالیکه تغییر کوچکی در زمان شروع حرکت یک قطار می تواند موجب جلوگیری از تأخیرات زیادی در مجموع برنامه سفر کل قطارها بشود؛ لذا در دنیای واقعی زمان شروع حرکت یک قطار می تواند در داخل یک محدوده زمانی قرار داده شود که پس از حل مدل زمان بهینه آن معین گردد. این محدوده های زمانی که بصورت زودترین زمان ممکن (EST) و دیرترین زمان ممکن(LST) برای حرکت هر قطار تعریف می گردند، با توجه به تقاضای مسافرین و صاحبان کالا ، تجربه برنامه ریزان و سایر محدودیتهای عملیاتی مشخص می شوند. محدودیتهای (۲) و (۳) برای این منظور در نظر گرفته می شوند .

$$ESTS_i \le DS_{i,S_N} \le LSTS_i \qquad (۲)$$

$$ESTN_j \le DN_{j,1} \le LSTN_j \qquad (۳)$$

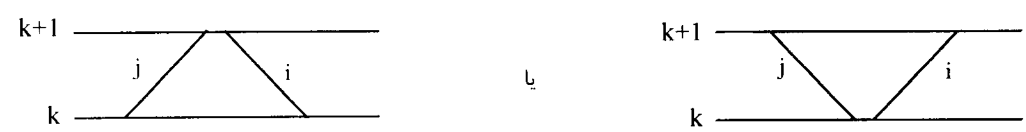
همانطور که در فرضیات مسأله بیان گردید تلاقی قطارها تنها در ایستگاهها و بلاکهای دو خطه امکان پذیر است، یعنی در هر لحظه فقط یک قطار می تواند در بلاک (فاصله بین دو ایستگاه) وجود داشته باشد. بعبارت دیگر اگر دو قطار مقابل بخواهند به یک بلاک وارد شوند، یکی از آن دو باید ابتدا از بلاک عبور نموده و قطار دیگر در ایستگاه مربوطه منتظر بماند؛ پس از رسیدن قطار اول به ایستگاه مقابل، در صورت لزوم قطار دوم وارد بلاک شود. تصاویر و روابط این موضوع در شکل ۲ نشان داده شده اند.

برای تبدیل این رابطه به محدودیتهای ریاضی چاره أی جز استفاده از متغیرهای صفرویک نیست و لذا محدودیتهای فوق به شکل زیر نوشته خواهند شد. در این محدودیت ها B یک عدد بزرگ مثبت است.

$$DS_{i,k+1} \ge AN_{j,k+1} - B \times y_{i,j,k} \qquad (۴)$$

$$DN_{j,k} \ge AS_{i,k} - B \times \left(1 - y_{i,j,k}\right) \qquad (۵)$$

محدودیتهای فوق تنها برای تلاقی دو قطار مقابل در داخل یک بلاک است. اما بدلیل مسائل ایمنی دو قطار



$DS_{i,k+1} \geq AN_{j,k+1}$ یا $DN_{j,k} \geq AS_{i,k}$

شکل ۲: ورود دو قطار مقابل به یک بلاک و روابط آنها.

هم جهت نیز نمی توانند بدنبال هم وارد یک بلاک شوند و حتما لازم است که یکی از قطارها منتظر بماند تا قطار جلویی به ایستگاه بعدی برس. این محدودیت به شکل رابطه (۶) برای کنترل توالی حرکت قطارهای جنوبی و رابطه (۷) برای کنترل توالی حرکت قطارها ی شمالی نوشته شده است.

$$DS_{i+1,k+1} \geq AS_{i,k} \quad (۶)$$

$$DN_{j+1,k} \geq AN_{j,k+1} \quad (۷)$$

حداقل زمان عبور هر قطار از یک بلاک که مستلزم رسیدن به حداکثر سرعت مجاز است به خصوصیات قطار (باری یا مسافری)، قدرت لکوموتیو، مشخصات هندسی خط، وشیب وفراز آن بستگی دارد، که بصورت اطلاعات اولیه باید به مدل داده شود. اما باید توجه داشت که حرکت قطار با حداکثر سرعت ممکن موجب ازدیاد مصرف سوخت وبالارفتن هزینه های استهلاک لکوموتیو، واگن وخطوط خواهد شد، لذا در صورت عدم نیاز نباید با حداقل زمان (حداکثر سرعت) بلاکها را طی نمود. از طرف دیگر، یک قطار نمی تواند از یک سرعت معین آهسته تر حرکت کند (این سرعت با توجه به محدودیتهای فنی لکوموتیو تعریف می گردد) وبنابراین زمان عبور قطارها از هر بلاک دارای حد بالا وپائین است که بصورت محدودیتهای زیر بیان شده است:

$$EPTS_{i,k} \leq AS_{i,k} - DS_{i,k+1} \leq LPTS_{i,k} \quad (۸)$$

$$EPTN_{j,k} \leq AN_{j,k+1} - DN_{j,k} \leq LPTN_{j,k} \quad (۹)$$

بدیهی است که برنامه حرکت هر قطار باید توالی زمانی داشته باشد. بعبارت دیگر زمان حرکت از هر ایستگاه باید بعد از زمان رسیدن قطار به آن ایستگاه باشد. لذا محدودیت های زیر در نظر گرفته می شوند.

$$DS_{i,k} \geq AS_{i,k}$$

$$DN_{j,k} \geq AN_{j,k}$$

از سوی دیگر، معمولا در برنامه سفر هر قطار توقفهای برنامه ریزی شده ای منظور می گردد که برای سوختگیری، تعویض مامورین قطار، ادای نماز ، بازدیدهای فنی وغیره در نظر گرفته می شوند. بنابراین زمان توقفهای فوق به محدودیتهای قبلی اضافه و به شکل زیر در مدل لحاظ می شوند.

$$DS_{i,k} \geq AS_{i,k} + STS_{i,k} \quad (۱۰)$$

$$DN_{j,k} \geq AN_{j,k} + STN_{j,k} \quad (۱۱)$$

روشهای حل مسأله

در این بخش به ارائه چهار روش متفاوت حل مسأله می پردازیم. پس از طرح روش تولید محدودیت، اضافه نمودن نامساویهای معتبر مورد بحث قرار گرفته است. دو روش دیگری که به آنها پرداخته شده است، روش کوچک کردن ابعاد مسأله و یک روش ابتکاری برای بدست آوردن جواب موجه هستند.

تولید محدودیت

از آنجائیکه مدل ارائه شده در بخش قبل دارای تعداد زیادی متغیر صفرویک بوده و یک مسأله ان-پی-هارد، NP-Hard[1] ، است، برای مسائل واقعی درزمان معقول قابل حل نیست؛ لذا لازم است که ازروشهای مختلفی برای کم کردن متغیرهای صفرویک آن استفاده شود. همانطور که قبلا توضیح داده شد نقش متغیرهای صفرویک صرفا جلوگیری از تلاقی قطارها در داخل بلاکهای یک خطه است، وچون از ابتدا نمی دانیم که تلاقی قطارها در کجا اتفاق خواهد افتاد این متغیرها را

1 – Nondeterministic polynomial

برای تمام بلاکها تعریف کرده ایم . یک رویکرد دیگر به مسأله اینست که ابتدا مسأله را بدون درنظرگرفتن محدودیتهای تلاقی بصورت یک مسأله برنامه ریزی خطی،LP [1]، حل کرده و هر کجا که تلاقی دو قطار در داخل بلاکی اتفاق افتاد، تنها در همان نقطه محدودیتهای تلاقی را برای آن بلاک تعریف و به مسأله اضافه نموده و مجددا آنرا حل کنیم. به این ترتیب تعداد متغیرهای صفرویک بنحو چشمگیری کاهش خواهدیافت: ولی ازآنجائیکه اضافه نمودن این محدودیتها ممکن است باعث ایجاد تلاقی درسایر بلاکها شود تعداد دفعاتی که می باید مسأله مجددا حل شود زیاد خواهد شد و قابل پیش بینی نیست. در دو نمونه مسأله تصادفی با ۱۰ قطار و ۲۰ ایستگاه که به این روش حل گردید، در یک مسأله ۱۰ بار و در مسأله دیگر۱۳ بار مجبور به حل مجدد مسأله گردیدیم. البته اگر همانند مسائل LP پس از اضافه نمودن چند محدودیت جدید مسأله خیلی سریع حل می گردید، این روش قطعا جواب خوبی می داد؛ اما چون مسأله متغیرهای عدد صحیح مخلوط است، هر بار که محدودیت صفرویک جدیدی به مسأله اضافه می شود نرم افزار Cplex قادر به استفاده موثر از جواب بدست آمده قبلی نیست و لذا حل مجدد مسأله تقریبا به اندازه مسأله اول زمان می گیرد. این باعث می شودکه مجموع زمانهای حل این روش ازحل مدل کامل اولیه بیشتر شود.

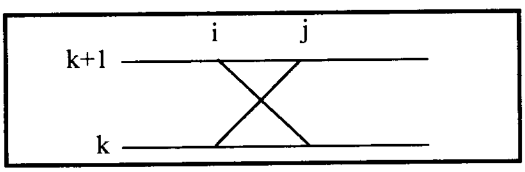
برای رفع این مشکل بررسیهای تجربی زیادی روی نحوه جابجایی محل تلاقی قطارها درجواب بهینه نسبت به حل مدل برنامه ریزی خطی آن (بدون درنظرگرفتن محدودیتهای تلاقی) صورت گرفت. در این بررسیها روشن شد که در پاسخ بهینه تقریبا ۸۷٪ ازنقاط تلاقی به یک یا دو ایستگاه بالاتر و یا پائین تر و ۱۲/۲٪ به سه ایستگاه بالاتر و یا پائین تر منتقل شده اند و تنها کمتر از ۱٪ از تلاقیها به ایستگاههای دورتر منتقل شده اند. لذا میتوان نتیجه گرفت که اگر ما پس ازحل مدل LP علاوه براضافه نمودن محدودیتهای تلاقی دربلاکی که تلاقی درآن اتفاق افتاده است، محدودیتهای مربوط به بلاکهای بالایی وپائینی آنرا نیز به مسأله اضافه کنیم درواقع ۸۷٪ ازتلاقیها را در مرحله اول حل مدل حذف کرده ایم، و باقیمانده تلاقیها را می‌توانیم با اضافه نمودن مرحله به مرحله محدودیتها رفع نمائیم. همچنین، اگر پس از حل مدل LP محدودیتهای دو بلاک بالاتر و پائین تر از محل تلاقی را به مسأله اضافه نمائیم تقریبا تمام تلاقیها در همان مرحله اول حل مدل مرتفع خواهند شد. انتخاب نهایی روش اضافه نمودن محدودیتهای تلاقی بستگی زیادی به ساختار مدل نیز دارد، اما در مسائلی که دراین مقاله حل گردیده است همواره محدودیتهای دو بلاک بالاتر و پائین تر از محل تلاقی قطارها را به مدل اضافه نموده ایم.

اضافه نمودن نامساویهای معتبر

از آنجائیکه مدل ارائه شده حتی با استفاده از روش اضافه نمودن نامساویهای معتبر برای مسائل واقعی قابل حل نیست، تلاش زیادی برای کوچک کردن فضای موجه مسأله وایجاد برشهای عمیق بدون آنکه جواب بهینه حذف شود صورت گرفت. ابتدا، برای درک بهتر از موضوع سعی گردید تا درخت متغیرهای صفرویک مسأله ترسیم و از روابط بین متغیرهای صفرویک نامساویها حدس زده شوند، که اینکار منجر به یافتن سه برش بسیار موثر گردید. همچنین توجه به واقعیات عملی موجب شد طول زمان سفر هر قطار نیز محدود شود تا فضای جستجو را کاهش دهد.

نامساویهای دسته اول

فرض کنید که در برنامه ریزی اولیه دو قطار i ام از بالا (جنوبی) و j ام از پائین (شمالی) در بلاک k ام تلاقی داشته باشند. این تلاقی در شکل ۳ نشان داده شده است.

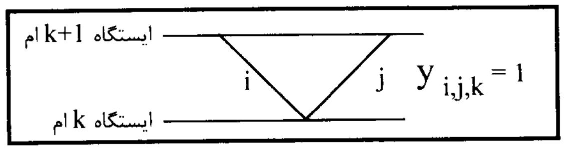


شکل ۳: تلاقی دو قطار در یک بلاک.

همانطوریکه در بخش قبل توضیح داده شد برای این رفع تلاقی غیر مجاز محدودیتهای تلاقی، محدودیتهای شماره (۴) و (۵)، را به مدل اضافه کرده ایم. در تعریف محدودیتهای تلاقی، هنگامیکه متغیر صفرویک مربوط به تلاقی قطار جنوبی i ام از بالا با قطار شمالی j ام از پایین در یک بلاک دارای مقدار یک است، بدین معنا

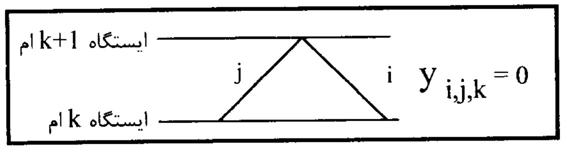
1 – Linear programming

است که قطار j ام بعد از قطار i ام از بلاک مزبور عبور خواهد نمود؛ یعنی در نمودار زمان- فاصله بشرح شکل ۴ خواهد بود.



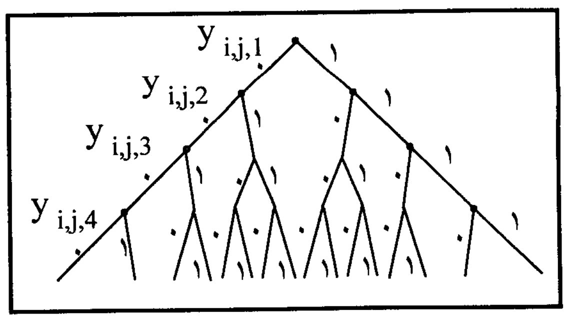
شکل ۴: عبور قطار شمالی بعد از قطار جنوبی.

اگر مقدار متغیر صفرویک مربوطه صفر باشد، بدین معنی است که قطار j ام زودتر از قطار i ام از بلاک عبور خواهد نمود؛ که این وضعیت در شکل ۵ نشان داده شده است.



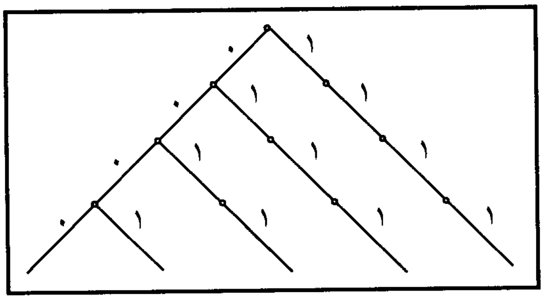
شکل ۵: عبور قطار شمالی قبل از قطار جنوبی.

از آنجاییکه در ابتدای حل مسأله نمی دانیم تلاقی این دو قطار در کدام بلاک اتفاق خواهد افتاد، محدودیتهای تلاقی برای تمام بلاکها را می نویسیم. یعنی برای تلاقی هر دو قطار با یکدیگر برابر تعداد بلاکها متغیر صفرویک تعریف می کنیم. اما، در واقع، حداکثر یک بار دو قطار مقابل می توانند تلاقی داشته باشند و لذا متغیر های صفرویک تعریف شده برای برخورد دو قطار i ام و j ام حد اکثر یک بار تغییر خواهند کرد.



شکل ۶: درخت متغییرهای صفر و یک.

شکل عمومی درخت متغیرهای صفرویک مربوط به برخورد دو قطار i ام و j ام به شرح شکل ۶ می باشد. در این شکل هر شاخه سمت راست دارای مقدار یک و هر شاخه سمت چپ دارای مقدار صفر است. اما، با توجه به توضیحات فوق، تمام این درخت نمی تواند عملا اتفاق بیافتد، و تنها شکل ۷ شاخه های موجه برای مسأله می باشد. بعبارت دیگر، چنانچه مقادیر متغیرهای صفرویک مربوط به دو قطار i و j دریک بلاک یک باشند در بلاکهای بعدی نمی تواند تغییر کنند.

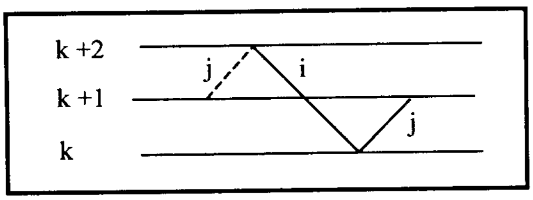


شکل ۷: شاخه های موجه یک درخت.

قضیه یک - اگر $y_{i,j,k} = 1$ باشد، آنگاه $y_{i,j,k+1}$ مساوی یک خواهد بود.

اثبات: شکل ۸ را در نظر بگیرید:

در شکل یاد شده $y_{i,j,k} = 1$ است، یعنی قطار j ام بعد از قطار i ام از بلاک k عبور می کند. بنابراین:



شکل ۸: عبور قطار j بعد از قطار i از بلاک k.

$$DS_{i,k+1} \le DN_{j,k} \le AN_{j,k+1} \qquad (۱۲)$$

حال فرض کنید که در بلاک بعدی، یعنی در بلاک k+1، $y_{i,j,k+1} = 0$ شود. یعنی:

$$DN_{j,k+1} \le DS_{i,k+2} \le AS_{i,k+1} \qquad (۱۳)$$

با توجه به اینکه همواره زمان رسیدن به ایستگاهی کوچکتر از زمان حرکت از همان ایستگاه برای هر قطار شمالی و جنوبی است، می توانیم از نامساویهای بالا نتایج زیر را بگیریم که:

$$(۱۲) \Longrightarrow \quad AS_{i,k+1} \le DN_{j,k+1}$$

$$(۱۳) \Longrightarrow \quad DN_{j,k+1} \le AS_{i,k+1}$$

و این تناقض است. لذا $y_{i,j,k+1}$ نمی تواند صفر باشد و حتما رابطه $y_{i,j,k+1} = 1$ برقرار است. بنابراین، نتیجه می گیریم که در حل مدل ارائه شده لازم نیست که تمام

درخت صفرویک متغیرهای تلاقی دو قطارحل شود. لذا، بدون آنکه پاسخهای موجه حذف شده باشند، بخش عمده ای از این درخت می تواند با برش مناسب حذف شود. در نتیجه، دسته محدودیتهای زیر را بعنوان نامساویهای معتبردسته اول به مسأله اضافه میکنیم.

$$y_{i,j,k} \le y_{i,j,k+1}$$

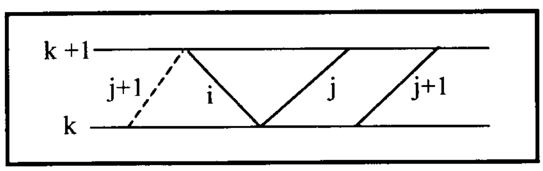
با استفاده از قضیه فوق تعداد کل شاخه ها برای برخورد دو قطار i و j با یکدیگر از 2^k به k+1 شاخه تقلیل پیدا می کند، در حالیکه تنها $m \times n \times (k-1)$ محدودیت به مسأله اضافه خواهد شد.

نامساویهای دسته دوم

بنا به فرضیات اولیه، قطارها نمی توانند در یک جهت از یکدیگر سبقت بگیرند. این فرض باعث می شود تا بین متغیرهای تلاقی دو قطار i و j با دو قطار i و j+1 رابطه ای برقرار شود که به شکل قضیه زیر بیان می شود.

قضیه دو - اگر $y_{i,j,k} = 1$ باشد، آنگاه $y_{i,j+1,k}$ مساوی یک خواهد بود.

اثبات: برای اثبات این قضیه همانند قضیه یک از برهان خلف استفاده می کنیم.



شکل ۹: مجاز نبودن سبقت دو قطار متوالی هم جهت.

شکل ۹ را در نظر بگیرید. فرض کنید که

$$y_{i,j+1,k} = 0$$

باشد، بنابراین:

$$DN_{j+1,k} \le DS_{i,k+1} \le AS_{i,k} \quad (۱۴)$$

چون در مدل ارائه شده سبقت مجاز نیست، همواره خواهیم داشت $DN_{j,k} \le DN_{j+1,k}$. بنابراین:

$$AS_{i,k} \le DN_{j,k} \quad (۱۵)$$

از سوی دیگر، چون بنا برشرط اولیه $y_{i,j,k}$ برابر یک است، خواهیم داشت:

$$AS_{i,k} \le DN_{j,k} \quad (۱۶)$$

از مقایسه (۱۵) و (۱۶) تناقض ایجاد می شود، لذا حتما تساوی مقابل، $y_{i,j+1,k} = 1$ ،برقرار است. بر اساس این قضیه می توان با اضافه کردن یک دسته محدودیت جدید درخت متغیرهای تلاقی قطارها را بر اساس تلاقی قطارهای قبلی محدود نمود. لذا محدودیت ذیل را به عنوان برش دو به مدل اضافه می کنیم.

$$y_{i,j+1,k} \le y_{i,j,k} \quad (۱۷)$$

نامساویهای دسته سوم

قضیه سه - اگر $y_{i,j,k} = 0$ باشد، آنگاه رابطه $y_{i+1,j,k} = 0$ برقرار است.

اثبات : مشابه اثبات قضیه دو است.

نتیجه : بر اساس قضیه سه نیز می توان یک دسته محدودیت جدید به مدل اضافه نمود تا درخت متغیرهای تلاقی قطارها را بر اساس تلاقی قطارهای قبلی محدود نماید. لذا محدودیت ذیل به عنوان نامساویهای دسته سوم به مدل اضافه می شود.

$$y_{i+1,j,k} \le y_{i,j,k} \quad (۱۸)$$

محدودیت زمان سفر

در دنیای واقعی، برنامه ریزی حرکت قطارها در راه آهنها توسط افراد با تجربه و خبره انجام می گیرد و لذا عملا همواره یک پاسخ تقریبی برای طول زمان سفر قطارها وجود دارد. بنابراین می توانیم برای کوچک کردن فضای موجه مسأله و همچنین اولویت دادن غیر مستقیم به برخی از قطارها مجموع زمان سفر هر قطاری را محدود کرده، آنها را بعنوان یک دسته محدودیت به شکل زیر به مدل اضافه نمائیم.

$$As_{i,1} - DS_{i,S_N} \le MTTS_i \quad (۱۹)$$

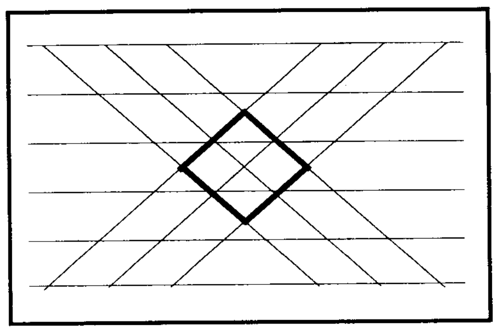
$$AN_{j,S_N} - DN_{j,1} \le MTTN_j \quad (۲۰)$$

کوچک کردن ابعاد مسأله

درحل مسائل متغیرهای عددصحیح مخلوط ابعاد مسأله خطی آن نیز بسیار حائزاهمیت است؛ زیرادرهرگروه یک بار مدل بصورت خطی حل مـی شود و لذا کوچک

کردن ابعاد قسمت خطی مدل نیز می تواند تاثیر مهمی بر زمان حل مسأله بگذارد.

با بررسی گراف حاصل از حل مدل مشاهده می شود که زمان حرکت هرقطار رامی توان به سه قسمت تقسیم نمود. قسمت اول زمانی است که هنوز با هیچ قطار دیگری برخورد نکرده است ولذا بدون هیچگونه محدودیتی می تواند باحداکثرسرعت مجاز حرکت کند. قسمت دوم، فاصله زمانی مابین تلاقی باقطارهای مقابل تا زمان آخرین تلاقی است، که مدل می باید محل تلاقیها و مدت توقف درهرایستگاه و سرعت عبور از بلاکها رابدست آورد. قسمت سوم، فاصله زمانی مابین زمان عبور از آخرین تلاقی تازمان رسیدن به مقصد است. در واقع وظیفه اصلی مدل بدست آوردن برنامه حرکت قطارها درقسمت دوم است که تقریباً به شکل یک لوزی می باشد، و قسمتهای اول و سوم ازحرکت قطارهابصورت دستی نیز قابل محاسبه وانجام است. شکل ۱۰ گویای این مطالب می باشد.



شکل ۱۰: محدوده لوزی شکل تقاطع قطارهای مقابل.

براساس توضیحات فوق، می توان ابتدا محل اولین و آخرین تلاقی هر قطار با قطارهای مقابل را معین و سپس مسأله را به شکل جدیدی تعریف کرد.

در این مسأله جدید مبدأ حرکت هر قطار ایستگاه قبلی ازاولین تلاقی و مقصد آن اولین ایستگاه بعد از آخرین تلاقی می باشد. نکته مهم درتغییر ایستگاه مبدأ، انتقال محدوده زمانی شروع حرکت قطارها به مبدأ جدید است که اینکار بوسیله نرم افزار کمکی که برای تولید مسأله نوشته شده است انجام می گیرد.

روش ابتکاری برای یافتن جواب موجه

درتمام مسائل متغیرهای عدد صحیح مخلوط داشتن یک حد بالای خوب می تواند نقش بسیار زیادی در کاهش زمان حل مسأله داشته باشد، و هر چقدر که این حد بالا به جواب بهینه نزدیکتر باشد تأثیر آن به شکل فزاینده ای بیشتر خواهد شد. برای یافتن یک جواب موجه مدل ارائه شده می توان از روشهایی که درمراجع (۷) و(۸) ذکر شده استفاده نمود. ما نیز دراینجا یک روش دیگر که بصورت عمومی قابل کاربرد در اغلب مسائل بزرگ صفر ویک است ارائه می دهیم.

زمان حلّ اغلب مدلهای متغیرهای عدد صحیح مخلوط با توجه به ابعاد مسأله بصورت نمایی افزایش پیدا می کند. یک رویکرد عمومی برای یافتن جواب موجه برای این قبیل مسائل اینست که ابتدا مسأله را بصورت کوچکتر حل کرده و با قرار دادن جوابهای آن در مسأله بزرگتر آنرا حل نمائیم، که اینکار را می توان تا چندین مرحله تکرار نمود. بدین ترتیب حل یک مسأله بزرگ به حل چندین مسأله کوچکتر تقسیم می شود که باتوجه به نمایی بودن زمان حل مسائل متغیرهای عدد صحیح مخلوط منجر به کاهش فوق العاده أی در زمان حل مسأله خواهد شد.

درمدل حاضرنیز از همین منطق برای یافتن یک جواب موجه خوب در زمان قابل قبول برای مسائل بزرگ استفاده شده است. بدین ترتیب که برای حل یک مسأله نمونه شامل ۳۰ قطار (۱۵ قطار رفت و۱۵ قطار برگشت) و۵۰ ایستگاه با زمان سیرتقریبی ۱۶ ساعت، ابتدا یک مسأله به ابعاد ۵۰×۷× ۷ بصورت بهینه حل گردید. سپس جوابهای این مسأله بصورت داده های ثابت در یک مسأله ۵۰ × ۱۰ × ۱۰ ریخته شده وحل شد. بدین ترتیب یک جواب موجه اولیه برای مسأله ۵۰ × ۱۰×۱۰ بدست آمد. با استفاده از این جواب، زمانهای شروع حرکت قطارها ثابت در نظر گرفته شده و بهمراه طول زمان سیر تقریبی هر قطار به مسأله اصلی انتقال داده شد و مسأله ۵۰ × ۱۰ × ۱۰ مجدداً حل گردید.

با انجام این مراحل، یک جواب موجه خوب برای مسأله ۵۰×۱۰ ×۱۰ حاصل شد که برای حل بهینه

همیـن مسـأله از آن بعنـوان یـک حـد خـوب بـرای زمـان سیـرهر قطـار و تـابع هـدف بدسـت آمـده اسـتفاده شـد. سپس، با قـراردادن این جوابـها در مسأله ۵۰× ۱۰× ۱۰ (با زمان های شروع متغیر) و حل مـجدد مسـأله جـواب بهینـه آن بدست آمـد. درمرحـله بعد با قـرار دادن ایـن جـواب در یـک مسـأله ۵۰× ۱۳× ۱۳ وتکـرار گامـهای فوق توانستیم جواب موجـه خـوب مسـأله ۵۰ × ۱۳ × ۱۳ را بدست آوریـم. بطورمشـابه جواب موجه خوب مسأله ۵۰×۱۵×۱۵ نیز حاصل گردید.

چون حل بهینـه هرمسأله بـا اسـتفاده ازجوابـهای مرحله قبل درمسـائل خیلی بزرگ زمان زیادی می گیـرد، لذا برای یافتـن یک جواب موجه بـرای مسـائل بـزرگتـر می توان از آن صرفنظـر نمـود؛ بدیـن ترتیـب کـه مـی توانیم جواب بهینه مرحله n ام را درمسـأله مرحلـه بعـد قرار دهیـم وپس از بدست آوردن یـک جواب موجه خوب، همـان جـواب مـوجه را در مسـأله مرحلـه بعـدی قـرار دهیـم واینـکار را تکرار کنیم تا به مسـأله اصلـی مـورد نظر برسیـم. بدین ترتیـب در زمـان بسـیار کوتاهـی مـی توانیـم بـرای هـرمسـأله ای جـواب موجـهی را بدست آوریم .

نتیجه گیـری

ابتدا بوسیله نوشتـن یک برنامـه بـه زبـان پاسـکال تعداد زیادی مسأله در ابعـاد مـختلف بـا داده هـای کـاملا تصادفـی ایـجاد وسپس با استفاده از نرم افـزارCplex 5.0 روی یک کامپیوترپنتیوم 233 حل گردیده است ونتایج آن درجدول ۱ آورده شده است.

همانطور که در این جـدول دیـده مـی شـود زمـان بدست آوردن جواب بهینه با اسـتفاده از روشـهای توضیـح داده شده دربخش روشـهای حـل مسـأله مـجموعا بسـیار کمتـر از یکصدم زمان حل مدل اولیـه اسـت؛ ایـن مـدل و روشـهای مذکـور قـادر هسـتند تـا مسـائل بـه ابعـاد ۵۰×۱۲×۱۲ را بصـورت بهینـه در زمـان کوتـاهی حـل نماینـد. برای مسائل بزرگتر نـیز الگوریتـم ابتـکاری ارائـه شـده برای بدست آوردن جواب موجه بسیار کار آمد بـود، بطوریکه جوابهای بسیار نزدیک به جواب بـهینه حاصل شد. برای مسائلـی که جواب بهینه آن بدست آمـده اسـت اختلاف جواب بهینه با جواب موجـه حـاصل از روش فـوق حدود دو دقیقه برای هرقطار است که بیـانگر توانـایی ایـن روش می باشد.

جدول ۱: نتایج حاصل از محاسبات برای مسائل با داده های کاملا تصادفی.

نام مدل	ابعاد مسأله	مقدارتابع هدف (دقیقه)				زمان حل مسائل (ثانیه)*					روش ابتکاری			
											جواب موجه		اختلاف (دقیقه)	
		آزاد	بهینه	اختلاف	متوسط هرقطار	مدل اصلی	تولید محدودیت	نامساویهای معتبر	کوچک سازی مسأله	حد بالا	تابع هدف	زمان (ثانیه)	مطلق	متوسط برای هرقطار
M1	4*4*10	1297	1310	13	1.6	0.71	0.71	0.66	0.44	<1	1310	<1	0	0.0
M2	6*4*10	1622	1638	16	1.6	1.32	1.32	1.32	0.66	<1	1640	<1	2	0.2
M3	5*5*20	3422	3470	48	4.8	214	81.9	5.5	2.14	1.2	3483	<1	13	1.3
M4	6*6*30	6275	6328	53	4.4	1257	521	69	19.8	7.5	6333	<1	5	0.4
M5	7*7*30	7328	7413	85	6.1	M	6300	803	284	13	7430	2.4	17	1.2
M6	7*7*50	12343	12435	92	6.6	M	10700	2839	342	16.9	12458	4.6	23	1.6
M7	8*8*50	14121	14237	116	7.3	M	M	M	1397	336	14259	25.3	22	1.4
M8	9*9*50	15908	16049	141	7.8	M	M	M	M	388	16070	69.5	21	1.2
M9	10*10*50	17663	17856	193	9.7	M	M	M	M	520	17863	141	7	0.4
M10	12*12*50	21191	21488	297	12.4	M	M	M	M	4457	21495	528	7	0.3

* M یک زمان بسیار بزرگ است.

مراجع

1 - Szpigle, B. (1973) . " Optimal train scheduling on a single line railway. " *Opers.Res.*, ,Vol. 27, 344-351.

2 - Mees, A. L. and Goh, C. J. (1991). " Optimal control on a graph with application to train scheduling problems." *Mathematical and Computer Modelling,* Vol.15, No.2, 49-58.

3 - Mees, A. L. (1991). " Railway scheduling with network optimization." *Math .Computer. Model.,* Vol. 15, 33-41.

4 - Mills, R. G. J., Perkins, S. E. and Pundey, P. J. (1991). " Dynamic rescheduling of long - haul trains for improvd timekeeping and enregy conservation." *Asia - Pacific J.opm. Res,* Vol.18, 146-65.

5 - Araya, S., Abe, K. and Fukumori, k. (1983). " An optimal rescheduling for online train traffic control in disturbed situation." *IEEE Conf.*

6 - Kraay, D., Harker, P. and Chen, B. (1991). "Optimal pacing of trains in freight, railroads." *Opers .Res.,* Vol. 39, 82-99.

7 - Cai, X. and Goh, C. J. (1994). " Fast heurstic for the train scheduling proublem." *Computer & Oprations Res .,* Vol. 21, No.5 , 499-510.

8 - Higgins, A., Ferreira, L. and Kozan, E. (1996). "Optimal scheduling of trains on a single line track." *Trans . Res. - B,* Vol. 30, No. 2, 147 – 161.

9 - Assad, A. A. (1980). "Models for rail tranportation ." *Transportation Res .-A,* Vol.14 A, 205 –220.

10 - Petersen, E. R. and Taylor, A. J. (1982). "A structured model for rail line simulation and optimization ." *Trans. Science,* Vol.16, 192-205.

11 - Kraft, E. R. (1987). "A branch and bound procedure for optimal train dispatching." *J. of Tran. Res. Forum,* Vol. 28, 263 –276.

12 - Fukumori, K., Sano, H., Hasegawa, T. and Sakai, T. (1987). "Fundamental algorithm for train scheduling based on artificial intelligente." *Sys. and Comp. in Japan,* R. 18 , No. 3.

13 - Martinelli, D. R. and Teng, H. (1995). "Optimization of railway operation using neural networks."

14 - Harker, P.T. (1990). " Use of advanced train control systems in scheduling and operating railroads models, algorithms and applications." *Trans. Res. Record.* No.1263.

۱۵- طاهرپور، ش . " زمانبندی حرکت قطارهای باری " ، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه علم وصنعت ایران (۱۳۷۳).

واژه نامه :

1 – Mixed zero-one	مخلوط صفر و یک
2 – Constraint generation	تولید محدودیت
3 – Valid inequalities	نامساویهای معتبر
4 – Linear programming	برنامه ریزی خطی