

توابع گرین سه‌بعدی برای معادلات حاکم بر خاک غیراشباع در فضای زمان

بهر روز گتمیری

دانشیار گروه مهندسی عمران - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

استاد مدرسه ملی پل و راه (پونز شوسه) - پاریس - فرانسه

احسان جباری

دانشجوی دکتری گروه مهندسی عمران - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۲/۸/۱۷، تاریخ تصویب ۸۳/۹/۷)

چکیده

در این تحقیق با ارائه فرمولاسیون مربوط به محیط‌های متخلخل غیراشباع شامل معادلات تعادل، جریان هوا و جریان آب، توابع گرین دسته معادلات دیفرانسیل حاکم برای یک محیط متخلخل غیراشباع شکل‌پذیر (ارتجاعی-خطی) سه‌بعدی در فضای زمان و در حالت متقارن مرکزی (کروی)، برای اولین بار معرفی شده‌اند. این توابع با الهام از کارهای انجام شده در عرصه خاکهای اشباع و با استفاده از روش‌های قابل اعمال برای معادلات خطی و ملحوظ داشتن تأثیرات رفتار غیرخطی معادلات حاکم ابتدا در فضای تبدیل لاپلاس و سپس در فضای زمان به صورت تحلیلی و کاملاً بسته معرفی و نیز ترسیم و کنترل گردیده‌اند. برای اطمینان از صحت نتایج به دست آمده نشان داده شده است که اگر شرایط مسئله به سمت شرایط پوروالاستوستاتیک میل کنند توابع به دست آمده نیز به سمت توابع گرین حالت پوروالاستوستاتیک میل می‌کنند.

واژه‌های کلیدی: تابع گرین، جواب اساسی، معادلات دیفرانسیل، خاک غیراشباع، محیط متخلخل، تبدیل لاپلاس، روش اجزاء مرزی.

مقدمه

خاک‌های اشباع و غیراشباع تدوین شده‌اند [۲۱]. اما لزوم یافتن توابع گرین معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم برای اعمال روش اجزاء مرزی، موجب شده است تا استفاده از این روش در همه زمینه‌ها با سرعتی بسیار کمتر نسبت به روش اجزاء محدود گسترش یابد.

تاکنون مقالات و تحقیقات متعددی مصروف به یافتن توابع گرین معادلات حاکم بر محیط اشباع گردیده است [۸، ۱۱-۱۵، ۲۴-۲۵، ۲۹-۳۰]. به همین جهت امروزه امکان استفاده از روش اجزاء مرزی در خاک‌های اشباع تقریباً میسر و بر این اساس مدل‌های عددی نیز تهیه و در حال استفاده است [۱۷، ۲۴].

براساس اطلاعات موجود، توابع گرین معادلات حاکم بر خاک‌های غیراشباع تاکنون در هیچ مرجعی ارائه نشده‌اند و به همین علت به کارگیری روش اجزاء مرزی در مورد خاک‌های غیراشباع هنوز امکان‌پذیر نیست. این تحقیق به عنوان تلاشی برای یافتن توابع گرین این دسته معادلات و با هدف ایجاد امکان استفاده از روش اجزاء مرزی برای خاک‌های غیراشباع صورت گرفته است.

تحلیل‌های استاتیکی، شبه‌استاتیکی و دینامیکی خاک‌های اشباع و غیراشباع از کاربردهای متعددی در رشته‌های مختلف علوم و مهندسی از قبیل ژئوفیزیک، ژئوتکنیک و مهندسی عمران برخوردارند. برای بررسی پدیده‌های مرتبط با این محیط ناگزیر از استخراج و حل معادلات حاکم بر این پدیده‌ها هستیم. به لحاظ شکل و ترکیب معادلات فوق، حل کامل و بسته این معادلات بجز در حالات بسیار ساده و کم اهمیت امکان‌پذیر نیست. به این ترتیب استفاده از روش‌های عددی راه‌گزینه‌ناپذیر حل دسته معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم است.

روش‌های اجزاء محدود و اجزاء مرزی در تعیین پاسخ این محیط‌ها می‌توانند به کار گرفته شوند. روش اجزاء محدود به لحاظ توانایی‌های گسترده آن، همانند سایر رشته‌های علوم مهندسی، در این زمینه نیز بطور تقریباً کامل مورد استفاده قرار گرفته و براساس این روش مدل‌های عددی با استفاده گسترده برای هر دو حالت

تاریخچه

به لحاظ تفاوت‌های اساسی در رفتار دو نوع خاک اشباع و غیراشباع، سالهاست که علم مکانیک خاک را به دو بخش مکانیک خاک‌های اشباع و مکانیک خاک‌های غیراشباع تقسیم می‌کنند. توضیح رفتاری خاک‌های اشباع با استفاده از تنها یک متغیر مستقل که تنش مؤثر می‌باشد، صورت می‌گیرد. در مورد خاک‌های غیراشباع، اگرچه تحلیل براساس این متغیر از ابتدا نتایج رضایت‌بخشی به دست نمی‌داد اما سال‌ها طول کشید تا متغیرهای مستقل قابل‌پذیرشی پیشنهاد شوند [۲۰]. در ابتدای دهه پنجاه قرن گذشته تحلیل تنش در خاک‌های غیراشباع به صورت بسطی از تئوری خاک اشباع صورت می‌گرفت. ابتدا بیشاپ و بلائی [۷] رابطه تنش مؤثر برای خاک‌های غیراشباع را به صورت:

$$\sigma' = (\sigma - p_a) + \chi(p_a - p_w) \quad (1)$$

پیشنهاد کردند که در آن χ متغیری تابع درجه اشباع خاک است و برای خاک خشک تا کاملاً اشباع از صفر تا یک تغییر می‌کند. در رابطه فوق p_a ، p_w ، σ و σ' به ترتیب فشار هوا، فشار آب، تنش کل و تنش مؤثر می‌باشند. ماتیاس و ردهاکریشنا [۲۸] ضمن اثبات عدم اعتبار رابطه فوق، عدم کفایت یک رابطه واحد را با معرفی سطوح حالتی که تغییرات نسبت پوکی e و درجه اشباع S_r را با تغییرات $(\sigma - p_a)$ و $(p_a - p_w)$ پیوند می‌داد، معرفی کردند. این نظریه در واقع برآیند نتیجه‌گیری خود آنها و نیز کارهای بورلاند [۱۰] و ایچزون و همکاران بود [۱].

اکنون بیش از دو دهه است که پیشنهاد فردلند و مورگنسترن [۱۸ و ۱۹] که استفاده از هر جفت از سه متغیر $(\sigma - p_a)$ ، $(\sigma - p_w)$ و $(p_a - p_w)$ را برای تحلیل محیط غیراشباع کافی می‌دانستند، مورد اجماع قرار گرفته است [۲۰].

درک صحیح رفتار خاک‌های غیراشباع بدون شناخت تاثیرات مکش (فشار حفره‌ای منفی) نیز امکان‌پذیر نیست. نظریه مکش ابتدا در فیزیک خاک توسط ایچزون و همکاران [۱] معرفی شد. براساس این نظریه ارتفاع و فشار موئینگی در حفرات خاک را پیش‌بینی می‌کنند.

معادلات حاکم بر اسکلت خاک شامل معادلات تعادل (برابری نیروها)، معادلات رفتاری (تنش-کرنش) و معادلات سازگاری (کرنش-تغییرشکل) هستند (بیو [۶]). در نظریه خاک‌های غیراشباع در نوشتن معادلات تعادل از متغیرهای مستقل $(\sigma - p_a)$ و $(p_a - p_w)$ استفاده می‌شود و معادلات رفتاری با در نظر گرفتن اثر مکش بر روی رفتار خاک نوشته می‌شوند. معادلات رفتاری خطی (ارتجاعی یا الاستیک) و یا غیرخطی (ارتجاعی-خمیری یا الاستوپلاستیک)، معادلاتی هستند که در مدل‌های مختلف رفتاری خاک‌های غیراشباع به کار رفته‌اند.

سطوح حالت سه‌بعدی برای درجه اشباع و نشانه پوکی در واقع معادلاتی هستند که تغییرات درجه اشباع و نشانه پوکی را بر حسب متغیرهای مستقل خاک غیراشباع بیان می‌کنند و دو معادله رفتاری مستقل برای محیط‌های غیراشباع به دست می‌دهند. نشان داده شده است که این سطوح حالت به ازای خصوصیات یک خاک ویژه، یکتا هستند [۲۰ و ۲۲]. بعدها نشان داده شد که تغییرات درصد رطوبت خاک شدیداً متأثر از فرایند اشباع و غیراشباع شدن و در نتیجه وابسته به مسیر خشک کردن یا مرطوب ساختن خاک است. این ویژگی با عنوان هیستریزس شناخته می‌شود. از این پس اهتمام قابل توجهی برای یافتن روابط ریاضی سطوح حالت e و S_r براساس نتایج آزمایش‌های متعدد انجام شده، صورت گرفت. از روابط خطی برای دامنه کوچک تغییرات تنش و مکش تا روابط لگاریتمی با نتایج قابل قبول‌تر برای دامنه بزرگتر تغییرات تنش و مکش و روابط بسیار پیچیده‌تر که هریک به فراخور سادگی یا پیچیدگی، در مدل‌سازی‌های مختلف مورد استفاده دارند. یکی از همین سطوح حالت توسط گتمیری و دولژ [۲۲] اخیراً معرفی گردیده است که در مدل اجزاء محدود U-DAM که توسط گتمیری و همکاران [۲۱] تهیه شد، به کار گرفته شده است.

جریان آب و هوا در خاک را نیز معمولاً شبیه حالت اشباع با تعمیم قانون داریسی [۱۶] به حالت غیراشباع مدل می‌کنند [۲۱]، با این تفاوت که در محیط غیراشباع ضرائب تراوایی آب و هوا به میزان قابل توجهی تابع درجه اشباع خاک هستند.

در اولین برخورد برای به دست آوردن توابع گرین معادلات حاکم بر رفتار خاک‌های غیراشباع، در نظر

دو و سه بعدی ارائه کرده‌اند. آنها جوابهایشان را برای هر دو فرمولاسیون $u_i^s - p_w$ و $u_i^s - u_i^f$ به دست آورده‌اند اما متأسفانه توابع به دست آمده تنها محدود به فضای تبدیل لاپلاس است و در فضای زمان استخراج نشده‌اند.

تحقیق حاضر تلاشی است برای یافتن توابع گرین در حالت غیراشباع و سه بعدی و شبه استاتیکی که پس از اعمال برخی ساده سازی‌ها، در نهایت توابع گرین مورد نظر را ابتدا در فضای تبدیل لاپلاس یا فضای فرکانس و سپس در فضای زمان معرفی می‌کند.

معادلات حاکم

در محیط متخلخل غیراشباع، با توجه به شکل (۱) معادلات حاکم شامل معادلات تعادل و رفتاری اسکلت جامد و معادلات پیوستگی فازهای آب و هوا می‌باشند. این معادلات به صورت روابط زیر نوشته می‌شوند (فردلند و رهاردجو [۲۰] و گتمیری و همکاران [۲۱]).

معادلات تعادل و رفتاری اسکلت جامد:

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij} p_a)_{,j} + p_{a,i} + b_i = 0$$

$$d(\sigma_{ij} - \delta_{ij} p_a) = D_{ijkl} d\epsilon_{kl} + D_s \delta_{ij} (dp_a - dp_w)$$

معادلات پیوستگی و انتقال هوا:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \rho_a n [1 - S_r (1 - H)] \} + \text{div} [\rho_a (u_a + H u_w)] = 0$$

$$u_a = -K_a \nabla \left(\frac{p_a}{\gamma_a} + Z \right)$$

معادلات پیوستگی و انتقال آب:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_w n S_r] + \text{div} [\rho_w u_w] = 0$$

$$u_w = -K_w \nabla \left(\frac{p_w}{\gamma_w} + Z \right)$$

در روابط فوق ρ_w و ρ_a به ترتیب جرم حجمی هوا و آب، γ_w و γ_a به ترتیب وزن حجمی هوا و آب، u_w و u_a به ترتیب سرعت هوا و آب، K_w و K_a به ترتیب ضرایب تراوایی هوا و آب، n و S_r به ترتیب ضریب تخلخل و درجه اشباع خاک و u ، ϵ ، σ و b به ترتیب تغییرشکل، کرنش، تنش و نیروی حجمی در اسکلت جامد می‌باشند. همچنین H ، D و D_s به ترتیب ضریب هانری، ضریب رفتار ارتجاعی اسکلت جامد و ضریب مربوط به تغییرشکل‌های ناشی از مکش هستند. Z و t نیز به ترتیب نشان‌دهنده ارتفاع از تراز مبنا و

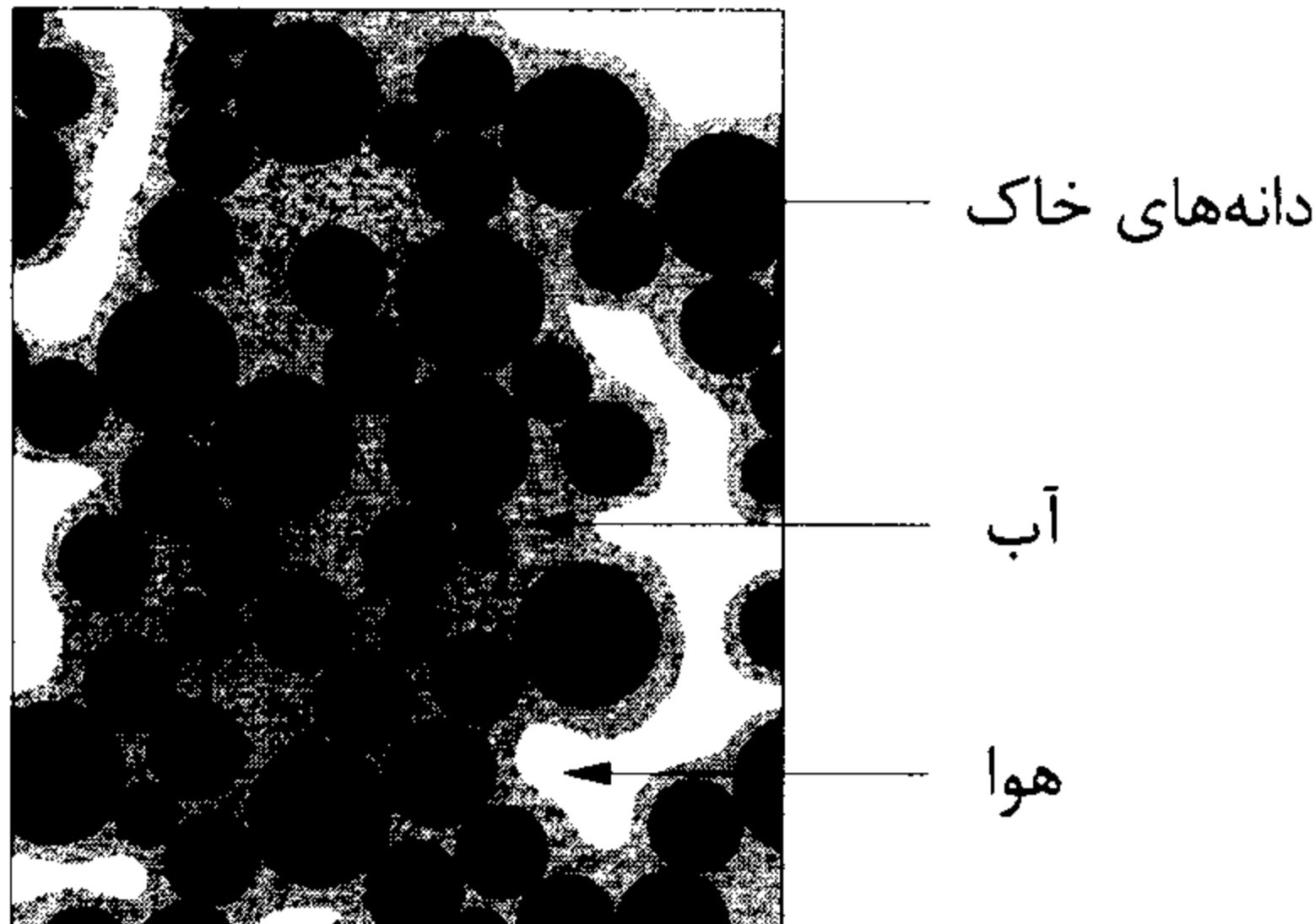
گرفتن تمام پیچیدگی‌های مربوط به این معادلات، منجر به روابط غیرخطی می‌شود که یافتن توابع گرین را بسیار مشکل می‌نماید. در این تحقیق سعی شده است با حفظ مبانی فیزیکی حاکم بر رفتار خاک‌های غیراشباع بعضی از روابط به صورت ساده‌تری عرضه شوند به گونه‌ای که یافتن توابع گرین مورد نظر را ممکن سازد. طبیعی است که کارهای انجام شده در عرصه روش اجزاء مرزی در گستره خاک‌های اشباع به عنوان الگوی حرکت اختیار شوند تا با ملحوظ کردن تفاوت‌های اساسی این دو نظریه، بتوان به توابع گرین خاک‌های غیراشباع دست یافت. ساده‌سازی‌های انجام گرفته، در بخش‌های بعدی توضیح داده خواهند شد.

توابع گرین در حالت اشباع طی مقالات متعددی معرفی شده‌اند. برای حالت شبه استاتیک نوآکی [۳۰] و کلیری [۱۵] و در فضای تبدیل لاپلاس، چنگ و لیگت [۱۴] این توابع را به دست آورده‌اند. در حالت دینامیکی احتمالاً اولین نتایج توسط بوریج و وارگوس [۱۱] به دست آمده باشند. پس از آن نوریس [۲۹] توابع گرین را به صورت هارمونیک زمانی و برای باری نقطه‌ای در محیط جامد و نیز باری نقطه‌ای در مایع به دست آورد. کی‌نیا و بنرجی [۲۵] با روش مشابهی توابع گرین را در فضای تبدیل لاپلاس و همچنین برای زمان‌های کوتاه، در فضای زمان ارائه نمودند. توابع مشهور هارمونیک زمانی به شکل فعلی آن به وسیله بونه [۸] معرفی شد که اشکالات آن توسط دومینگوئز [۱۷] نشان داده شده‌اند. نهایتاً کامل‌ترین توابع گرین برای حالات دو و سه بعدی توسط چن [۱۲ و ۱۳] طی دو مقاله ارائه شده‌اند. این توابع برای حالت دو بعدی توسط گتمیری و کمالیان [۲۴] به نحوی اصلاح شده‌اند که نتایج رضایت بخش‌تری را به دست می‌دهند. چن برای عبور از فضای تبدیل لاپلاس و استخراج نتایج در فضای زمان ناگزیر به استفاده از تقریب و صرفنظر از برخی عبارات بود و آنها نشان دادند که جملات در نظر گرفته شده برای تقریب تبدیل عکس لاپلاس کافی نیست و توابع اصلاح شده را با موفقیت در مدل عددی مورد اشاره به کار گرفتند.

اخیراً نیز شانز و پرل (۲۰۰۴) جوابهای اساسی دینامیکی جدیدی را برای خاکهای اشباع با در نظر گرفتن تغییرشکل اسکلت جامد و هم چنین تغییرشکل سیال و نیز با و بدون در نظر گرفتن تراکم پذیری در هر دو حالت

جریان هوا را به دست آورد. سرعت جریان هوا برابر است با:

$$u_a = -K_a \nabla \left(\frac{p_a}{\gamma_a} + Z \right) \quad (7)$$



شکل ۱: شمای محیط متخلخل غیراشباع

K_a ضریب تراوایی هوا برابر:

$$K_a = D_k \frac{\gamma_a}{\mu_a} [e(1 - S_r)]^{E_k} \quad (8)$$

است که در آن μ_a لزجت دینامیکی هوا و D_k و E_k ثابت هستند (لمب و ویثمن [۲۷]).

رابطه بقای جرم برای واحد حجم خاک غیراشباع عبارت است از:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \rho_a n [1 - S_r (1 - H)] \} + \text{div} [\rho_a (u_a + H u_w)] = 0 \quad (9)$$

ضریب هانری (H) در معادله (۹) بیانگر میزان هوای حل شده در آب حفره‌ای می‌باشد و با توجه به کوچک بودن آن ($H \leq 0.02$)، می‌توان از آن صرفنظر کرد و معادله پیوستگی را بدون در نظر گرفتن هوای حل شده در آب نوشت! با این توصیف رابطه (۹) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_a n (1 - S_r)] + \text{div} [\rho_a u_a] = 0 \quad (10)$$

با فرض ثابت بودن ρ_a و K_a در محیط و نیز صرفنظر از تغییرات ρ_a نسبت به زمان و یادآوری اینکه لاپلاسیان Z برابر صفر است، دو رابطه (۷) و (۱۰) نتیجه می‌دهند:

متغیر زمان می‌باشند. ∇ و δ_{ij} هم به ترتیب به عنوان عملگر گرادیان و تابع دلتای کرونکر به کار رفته‌اند.

همانگونه که مشاهده می‌شود در معادلات فوق به دلیل اندک بودن آهنگ تغییرات u_i ، p_a و p_w از عبارات شامل شتاب (مشتق دوم متغیرهای فوق نسبت به زمان) صرفنظر و معادلات در حالت شبه‌استاتیک حل شده‌اند.

در بخش‌های بعدی، هریک از دسته معادلات بالا مورد بررسی قرار گرفته و تغییراتی که به منظور یافتن توابع گرین در آنها داده شده است به نقد و بررسی گذاشته خواهد شد.

معادلات تعادل

معادلات تعادل را براساس تئوری متغیرهای مستقل با دو متغیر $(\sigma - p_a)$ و $(p_a - p_w)$ و با رفتار خطی ارتجاعی می‌نویسیم. معادلات تعادل برای اسکلت جامد عبارتند از:

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij} p_a)_{,j} + p_{a,i} + b_i = 0 \quad (2)$$

و روابط تنش-کرنش:

$$d(\sigma_{ij} - \delta_{ij} p_a) = D_{ijkl} d\epsilon_{kl} + D_s \delta_{ij} (dp_a - dp_w) \quad (3)$$

یا:

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij} p_a) = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} + D_s \delta_{ij} (p_a - p_w) \quad (4)$$

که در آن λ و μ ضرائب لامه مربوط به رفتار ارتجاعی خاک می‌باشند.

با در نظر گرفتن روابط کرنش-تغییرشکل:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (5)$$

رابطه نهائی اسکلت جامد به دست می‌آید:

$$(\lambda + \mu) u_{j,ij} + \mu u_{i,jj} + (D_s - 1) p_{a,i} - D_s p_{w,i} + b_i = 0 \quad (6)$$

معادله جریان هوا

با ترکیبی از قانون تعمیم‌یافته داریسی برای جریان گازها و قانون بقای جرم برای هوا می‌توان رابطه کلی

^۱ در بسیاری از مراجع حتی برای کاربردهای معمول خاک غیراشباع، از ضریب هانری صرفنظر شده است [۲۱]

که در آن α و β مقادیر ثابت‌اند. با انتخاب $\alpha=1$ و β منفی، می‌توان مشاهده نمود که با صفر شدن مکش یا اشباع نمودن خاک، درجه اشباع به سمت یک میل می‌کند و با افزایش مکش، درجه اشباع کاهش می‌یابد. با توجه به بسط به سری تیلور تابع:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \Lambda \quad (15)$$

و دانستن اینکه در نظر گرفتن جملات دوم به بعد به پیچیدگی بیشتر معادلات نهائی می‌انجامد^۱، فقط جمله اول بسط را در نظر گرفته:

$$S_r = \alpha + \beta(p_a - p_w) \quad (16)$$

و با استفاده از آن رابطه (۱۲) یا طرف دوم رابطه (۱۱) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\rho_a [1 - \alpha - \beta(\hat{p}_a - \hat{p}_w)] \frac{\partial}{\partial t} (u_{i,i}) - \rho_a \beta \hat{u}_{i,i} \frac{\partial}{\partial t} (p_a - p_w) \quad (17)$$

بنابراین معادله جریان هوا یا رابطه (۱۱) به صورت رابطه (۱۸) در می‌آید:

$$\frac{\rho_a K_a}{\gamma_a} \nabla^2 p_a = -\rho_a \beta \hat{u}_{i,i} \frac{\partial}{\partial t} (p_a - p_w) + \rho_a [1 - \alpha - \beta(\hat{p}_a - \hat{p}_w)] \frac{\partial}{\partial t} (u_{i,i}) \quad (18)$$

معادله جریان آب

با اعمال دوباره قانون تعمیم‌یافته داریسی برای جریان رطوبت و قانون بقای جرم رطوبت، می‌توان رابطه مشابهی برای جریان رطوبت به دست آورد. سرعت جریان آب u_w ، عبارت است از:

$$u_w = -K_w \nabla \left(\frac{p_w}{\gamma_w} + Z \right) \quad (19)$$

که در آن K_w ضریب تراوایی آب و برابر است با (آلونزو و لوره [۲]):

$$\frac{\rho_a K_a}{\gamma_a} \nabla^2 p_a = \rho_a \frac{\partial}{\partial t} [n(1 - S_r)] \quad (11)$$

در رابطه (۱۱) عملگر لاپلاسین است.

توجه داریم که مطابق رابطه (۸) K_a تابع S_r است و صرفنظر کردن از تغییرات آن صرفاً به این دلیل است که جایگزین کردن K_a با S_r و در نتیجه با $(p_a - p_w)$ ، شکل معادلات حاکم را غیرخطی و امکان یافتن تابع گرین از روش‌های متداول را منتفی می‌کند. بنابراین در قدم اول می‌توان این فرض را پذیرفت و برای تاثیر تغییرات K_a ، آن را با استفاده از S_r در محدوده‌های مختلف مکش، محاسبه و در توابع گرین نهائی به کار برد. به این ترتیب تاثیر S_r در ضریب تراوایی هوا منظور و مفهوم فیزیکی پایه‌ای تاثیر S_r در تراوایی تأمین و تغییرات آن در محدوده‌های مختلف به صورت تابع چندخطی در نظر گرفته شده است. علاوه بر این هنگام مدل‌سازی عددی برای حفظ دقت محاسبات مناسب‌تر است از روش چندناحیه‌ای استفاده و میدان محاسباتی به صورت نواحی با تغییرات ضریب تراوایی کم یا قابل قبول در نظر گرفته شود.

اما سمت راست رابطه (۱۱) را می‌توان اینطور نوشت:

$$\begin{aligned} \rho_a \frac{\partial}{\partial t} [n(1 - S_r)] &= \rho_a \left[(1 - S_r) \frac{\partial}{\partial t} (n) - n \frac{\partial}{\partial t} (S_r) \right] \\ &= \rho_a \left[(1 - \hat{S}_r) \frac{\partial}{\partial t} (n) - \hat{n} \frac{\partial}{\partial t} (S_r) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

علامت $\hat{\quad}$ نشان می‌دهد که متغیر مورد نظر در محدوده زمانی ∂t ثابت فرض می‌شود. ضریب تخلخل n را نیز می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$n = \varepsilon_v = \varepsilon_{ii} = u_{i,i} \quad (13)$$

در تئوری خاک‌های غیراشباع، S_r به صورت تابعی از مکش توسط روابط مختلفی عرضه می‌گردد و در این تحقیق شکل لگاریتمی برای آن در نظر گرفته شده است. تغییرات لگاریتمی درجه اشباع بر حسب مکش، براساس مشاهدات آزمایشگاهی یکی از شکل‌های متداول استفاده شده می‌باشد (فردلند و رِهاردجو [۲۰]):

$$S_r = \alpha + \beta \ln(p_a - p_w) \quad (14)$$

^۱ به عقیده برخی محققین، به ویژه در تنش‌های کوچک، رابطه (۲۰) را می‌توان به صورت خطی در نظر گرفت [۲۱].

که در آن s متغیر تبدیل لاپلاس، $f(x,t)$ تابع تحت تبدیل لاپلاس و L عملگر تبدیل لاپلاس هستند. علامت \sim بیانگر تبدیل یافته تابع تحت تبدیل لاپلاس است.

در این صورت پس از حل معادله دیفرانسیل، با تبدیل معکوس لاپلاس قادر خواهیم بود تا جواب نهائی را در فضای زمان به دست آوریم. با توجه به این که:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t} A, s, t\right) = sL(A) - A_{(t=0)}$$

$$u_{i,(t=0)} = 0$$

(۲۶)

معادلات (۶)، (۱۸) و (۲۴) به معادلات (۲۷)، (۲۸) و (۲۹) تبدیل خواهند شد:

$$(\lambda + \mu) \tilde{u}_{j,ij} + \mu \tilde{u}_{i,jj} - \tilde{p}_{a,i} + D_s(\tilde{p}_{a,i} - \tilde{p}_{w,i}) + \tilde{b}_i = 0$$

(۲۷)

$$\frac{\rho_a K_a}{\gamma_a} \nabla^2 \tilde{p}_a = \rho_a s [1 - \alpha - \beta (\hat{p}_a - \hat{p}_w)] \tilde{u}_{i,i} - \rho_a \hat{u}_{i,i} s \beta (\tilde{p}_a - \tilde{p}_w) - \rho_a [1 - \alpha - \beta (\hat{p}_a - \hat{p}_w)] u_{i,i(t=0)} + \rho_a \hat{u}_{i,i} \beta (p_{a(t=0)} - p_{w(t=0)})$$

(۲۸)

$$\frac{\rho_w K_w}{\gamma_w} \nabla^2 \tilde{p}_w = \rho_w s [\alpha + \beta (\hat{p}_a - \hat{p}_w)] \tilde{u}_{i,i} + \rho_w s \hat{u}_{i,i} \beta (\tilde{p}_a - \tilde{p}_w) - \rho_w [\alpha + \beta (\hat{p}_a - \hat{p}_w)] u_{i,i(t=0)} - \rho_w \hat{u}_{i,i} \beta (p_{a(t=0)} - p_{w(t=0)})$$

(۲۹)

که در آن علامت \sim نشان دهنده متغیر در فضای تبدیل لاپلاس است. نهایتاً سه معادله فوق را می‌توان اینطور نوشت:

$$c_{11} \tilde{u}_{j,ij} + c_{12} \tilde{u}_{i,jj} + c_{13} \tilde{p}_{a,i} + c_{14} \tilde{p}_{w,i} + c_{15} = 0$$

(۳۰)

$$c_{21} \tilde{u}_{i,i} + c_{22} \tilde{p}_a + c_{23} \nabla^2 \tilde{p}_a + c_{24} \tilde{p}_w + c_{25} = 0$$

(۳۱)

$$c_{31} \tilde{u}_{i,i} + c_{32} \tilde{p}_a + c_{33} \nabla^2 \tilde{p}_w + c_{34} \tilde{p}_w + c_{35} = 0$$

(۳۲)

که در آن ضرایب c_{ij} عبارتند از:

$$c_{11} = \lambda + \mu$$

$$c_{12} = \mu$$

$$c_{13} = -1 + D_s$$

$$K_w = K_{wz0} \left(\frac{S_r - S_{ru}}{1 - S_{ru}} \right)^{3.5}$$

(۲۰)

در رابطه فوق S_{ru} درجه اشباع باقیمانده آب است و K_{wz0} ضریب تراوایی ذاتی آب و برابر:

$$K_{wz0} = a_k 10^{\alpha_k e}$$

(۲۱)

در نظر گرفته می‌شود. در رابطه (۲۱) a_k و α_k ثابت هستند.

با اعمال قانون بقای جرم، رابطه جریان آب به شکل زیر به دست خواهد آمد:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_w n S_r] + \text{div} [\rho_w u_w] = 0$$

(۲۲)

باز هم با فرض ثابت بودن ρ_w و K_w در محیط و نیز صرفنظر از تغییرات ρ_w نسبت به زمان خواهیم داشت:

$$\frac{\rho_w K_w}{\gamma_w} \nabla^2 p_w = \rho_w \frac{\partial}{\partial t} [n S_r]$$

(۲۳)

همانگونه که در مورد K_a بیان شد، با استدلال مشابهی ناگزیر از صرفنظر کردن از تغییرات K_w در محدوده‌های مشخص S_r می‌باشیم. ثابت بودن K_w در محدوده‌های مشخصی از S_r و تغییر آن با تغییر S_r که عملاً منجر به فرض معادل خطی بودن K_w در معادله جریان می‌باشد به راحتی مفهوم اساسی تغییر K_w با تغییر درجه اشباع را تامین می‌کند.

سمت راست معادله (۲۳) را قبلاً در رابطه (۱۲) به دست آورده‌ایم و لذا خواهیم داشت:

$$\frac{\rho_w K_w}{\gamma_w} \nabla^2 p_w = \rho_w \beta \hat{u}_{i,i} \frac{\partial}{\partial t} (p_a - p_w) + \rho_w [\alpha + \beta (\hat{p}_a - \hat{p}_w)] \frac{\partial}{\partial t} (u_{i,i})$$

(۲۴)

تبدیل لاپلاس

برای حذف متغیر زمان از یک مجموعه معادلات دیفرانسیل، یکی از مناسب‌ترین روش‌ها اعمال تبدیل لاپلاس است (آرفکین و وِبر [۳]):

$$L[f(x,t), s] = \tilde{f}(x,s) = \int_0^\infty e^{-st} f(x,t) dt$$

(۲۵)

نقطه‌ای و لحظه‌ای در میدانی به ابعاد بی‌نهایت است (بریا و دومینگوئز [۹] و بیر [۵]).

بنابراین کافی است سمت راست دستگاه معادلات دیفرانسیل رابطه (۳۴) (یا شرایط مرزی یا شرایط اولیه) را برداشته و جای آن بار نقطه‌ای $\delta(x)$ را بگذاریم.

متداول‌ترین روش برای به دست آوردن تابع گرین، روش کوپرادزه [۲۶] است. براساس این روش مسئله یافتن تابع $\tilde{G} = [\tilde{g}_{ij}]$ است که در معادله زیر صدق می‌کند:

$$[C_{ik}][\tilde{g}_{kj}] + [I]\delta(x) = 0 \quad (37)$$

در رابطه (۳۷)، $[I]$ ماتریس همانی است. از طرفی از جبر ماتریسی می‌دانیم که:

$$[C_{ik}][C_{kj}^*] = [I] \det(C_{ij}) \quad (38)$$

اما اگر تابع اسکالری مانند φ وجود داشته باشد که در رابطه (۳۹) صدق کند:

$$\det(C_{ij})\varphi + \delta(x) = 0 \quad (39)$$

با جایگذاری از رابطه (۳۸) در رابطه (۳۹) و ضرب کردن در $[I]$:

$$[C_{ik}][C_{kj}^*]\varphi + [I]\delta(x) = 0 \quad (40)$$

از مقایسه روابط (۳۷) و (۴۰) می‌توان نتیجه گرفت که:

$$[\tilde{g}_{ij}] = [C_{ij}^*]\varphi \quad (41)$$

در واقع مسئله تبدیل می‌شود به یافتن تابع اسکالر φ که در رابطه (۳۹) صدق کند و محاسبه ماتریس کوفاکتور $[C_{ij}^*]$.

با محاسبه دترمینان $[C_{ij}]$ ، رابطه (۳۷) در فضای تبدیل لاپلاس به صورت زیر در خواهد آمد:

$$(D_1 \nabla^{10} + D_2 \nabla^8 + D_3 \nabla^6) \varphi + \frac{1}{s} \delta(x) = 0 \quad (42)$$

که در آن $\nabla^{2n} = (\nabla^2)^n$ ، n بار تکرار عملگر لاپلاسین است. همچنین:

$$D_1 = c_{12}^2(c_{11} + c_{12})c_{23}c_{33}$$

$$D_2 = -c_{12}^2(c_{13}c_{21}c_{33} + c_{14}c_{23}c_{31}) +$$

$$c_{12}^2(c_{11} + c_{12})(c_{22}c_{33} + c_{23}c_{34})$$

$$c_{14} = -D_s$$

$$c_{15} = -\tilde{b}_i$$

$$c_{21} = s\rho_a[1 - \alpha - \beta(\hat{p}_a - \hat{p}_w)]$$

$$c_{22} = -s\rho_a\beta\hat{u}_{i,i}$$

$$c_{23} = -\frac{\rho_a K_a}{\gamma_a}$$

$$c_{24} = s\rho_a\beta\hat{u}_{i,i}$$

$$c_{25} = -\rho_a[1 - \alpha - \beta(\hat{p}_a - \hat{p}_w)]u_{i,i(t=0)} +$$

$$\rho_a\hat{u}_{i,i}\beta(p_{a(t=0)} - p_{w(t=0)})$$

$$c_{31} = s\rho_w[\alpha + \beta(\hat{p}_a - \hat{p}_w)] \quad c_{32} = s\rho_w\beta\hat{u}_{i,i}$$

$$c_{33} = -\frac{\rho_w K_w}{\gamma_w}$$

$$c_{34} = -s\rho_w\beta\hat{u}_{i,i}$$

$$c_{35} = -\rho_w[\alpha + \beta(\hat{p}_a - \hat{p}_w)]u_{i,i(t=0)} -$$

$$\rho_w\beta(p_{a(t=0)} - p_{w(t=0)})\hat{u}_{i,i} \quad (33)$$

توابع گرین

دسته معادلات دیفرانسیل (۳۰)، (۳۱) و (۳۲) را

می‌توان به شکل ماتریسی زیر نیز نشان داد:

$$[C_{ij}] \times \vec{\omega} = \vec{f} \quad (34)$$

که در آن $C_{ij} = c_{ij}d_{ij}$ و عملگرهای دیفرانسیلی است. همچنین:

$$\omega_i = \tilde{u}_i \quad i = \overline{1,3}$$

$$\omega_4 = \tilde{p}_a$$

$$\omega_5 = \tilde{p}_w \quad (35)$$

و:

$$f_i = -\tilde{b}_i \quad i = \overline{1,3}$$

$$f_4 = -c_{25}$$

$$f_5 = -c_{35} \quad (36)$$

تعبیر فیزیکی تابع گرین یا جواب اساسی یا هسته

(کرنل) یک معادله دیفرانسیل، عبارت از تابع پتانسیل $p(x, \xi)$ در نقطه x از میدان است که بر اثر تحریک $e(\xi)$ در نقطه تحریک ξ ایجاد شده است. این تحریک می‌تواند تابع دلتای دیراک $\delta(x)$ یا همان بار واحد ضربه‌ای و لحظه‌ای باشد. به عبارت دیگر جواب اساسی، ساده‌ترین جواب معادله دیفرانسیل است که ناشی از باری

خواهیم داشت:

$$\Phi_2 - \Phi_1 = (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \Phi \quad (51)$$

و بنابراین:

$$\Phi = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} = \frac{e^{-\lambda_2 r} - e^{-\lambda_1 r}}{4\pi r (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \quad (52)$$

و به دنبال آن با اعمال سه بار عملگر عکس لاپلاسین:

$$\nabla^{-2}(\vartheta) = r^{-2} \int_r \left(r^2 \int_r (\vartheta dr) dr \right) \quad (53)$$

تابع φ به دست خواهد آمد:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi r D_1 s (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left(\frac{e^{-\lambda_2 r}}{\lambda_2^6} - \frac{e^{-\lambda_1 r}}{\lambda_1^6} \right) \quad (54)$$

توابع گرین $[\tilde{g}_{ij}]$ یا مولفه‌های ماتریس کوفاکتور $[c_{ij}^*]$ نیز عبارتند از:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{ij} &= \delta_{ij} (F_{11} \nabla^8 + F_{12} \nabla^6 + F_{13} \nabla^4) \varphi \\ &+ (F_{21} \nabla^6 \partial_i \partial_j + F_{22} \nabla^4 \partial_i \partial_j + F_{23} \nabla^2 \partial_i \partial_j) \varphi \\ \tilde{g}_{4i} &= (F_{31} \nabla^6 \partial_i + F_{32} \nabla^4 \partial_i) \varphi \\ \tilde{g}_{5i} &= (F_{41} \nabla^6 \partial_i + F_{42} \nabla^4 \partial_i) \varphi \\ \tilde{g}_{i4} &= (F_{51} \nabla^6 \partial_i + F_{52} \nabla^4 \partial_i) \varphi \\ \tilde{g}_{i5} &= (F_{61} \nabla^6 \partial_i + F_{62} \nabla^4 \partial_i) \varphi \\ \tilde{g}_{44} &= (F_{71} \nabla^8 + F_{72} \nabla^6) \varphi \\ \tilde{g}_{45} &= (F_{73} \nabla^6) \varphi \\ \tilde{g}_{54} &= (F_{74} \nabla^6) \varphi \\ \tilde{g}_{55} &= (F_{75} \nabla^8 + F_{76} \nabla^6) \varphi \quad i, j = \overline{1,3} \end{aligned} \quad (55)$$

ضرائب F_{ij} در پیوست (الف) ارائه شده‌اند.

در فضای تبدیل لاپلاس

به این ترتیب با قرار دادن تابع φ به دست آمده از رابطه (۵۴) در روابط (۵۵)، توابع گرین مورد نظر در فضای تبدیل لاپلاس به دست می‌آیند. با تعریف توابع Γ_i

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= K_{11} \Omega_1 + K_{12} \Omega_2 + K_{13} \Omega_3 \\ \Gamma_2 &= K_{21} \Omega_4 + K_{22} \Omega_5 + K_{23} \Omega_6 \\ \Gamma_3 &= K_{21} \Omega_1 + K_{22} \Omega_2 + K_{23} \Omega_3 \end{aligned} \quad (56)$$

توابع \tilde{g}_{ij} عبارت خواهند بود از:

$$\begin{aligned} D_3 &= c_{12}^2 c_{13} (c_{24} c_{31} - c_{21} c_{34}) + \\ &c_{12}^2 c_{14} (c_{21} c_{32} - c_{22} c_{31}) - \\ &c_{12}^2 (c_{11} + c_{12}) (c_{24} c_{32} - c_{22} c_{34}) \end{aligned} \quad (43)$$

رابطه (۴۲) را به این صورت هم می‌توان نوشت:

$$\left(\nabla^4 + \frac{D_2}{D_1} \nabla^2 + \frac{D_3}{D_1} \right) [D_1 s \nabla^6(\varphi)] + \delta(x) = 0 \quad (44)$$

اگر تابع Φ را اینطور تعریف کنیم:

$$\Phi = D_1 s \nabla^6(\varphi) \quad (45)$$

در این صورت رابطه (۴۴) به این شکل تبدیل خواهد شد:

$$(\nabla^2 - \lambda_1^2)(\nabla^2 - \lambda_2^2) \Phi + \delta(x) = 0 \quad (46)$$

که در آن λ_1^2 و λ_2^2 عبارتند از:

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{-D_2 \pm \sqrt{D_2^2 - 4D_1 D_3}}{2D_1} \quad (47)$$

رابطه (۴۴) را به هر یک از دو صورت روابط (۴۸) و (۴۹) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - \lambda_1^2) \Phi_1 + \delta(x) &= 0 \\ \Phi_1 &= (\nabla^2 - \lambda_2^2) \Phi \end{aligned} \quad (48)$$

و:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - \lambda_2^2) \Phi_2 + \delta(x) &= 0 \\ \Phi_2 &= (\nabla^2 - \lambda_1^2) \Phi \end{aligned} \quad (49)$$

از مبحث معادلات دیفرانسیل می‌دانیم که معادلات (۴۸) و (۴۹) از نوع معادله هلمهولتز هستند. توابع گرین معادله هلمهولتز برای فضای کاملاً متقارن که فقط تابع r باشد، در حالت‌های دو و سه بعدی، به ترتیب عبارتند از (آرفکین و وبر [۳] و آسندون و همکاران [۳۱]):

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \frac{K_0(\lambda_i r)}{2\pi} & i = \overline{1,2} \\ \Phi_i &= \frac{e^{-\lambda_i r}}{4\pi r} & i = \overline{1,2} \end{aligned} \quad (50)$$

که در آن K_0 تابع بیسل اصلاح شده از رتبه صفر است. اما برای حالت سه بعدی، با کسر رابطه (۴۸) از رابطه (۴۹)

ضرائب m_i در رابطه (۵۹) عبارتند از:

$$m_1 = \frac{-\frac{D_2}{s} + \sqrt{\frac{D_2^2 - 4D_1D_3}{s^2}}}{2D_1}$$

$$m_2 = \frac{-\frac{D_2}{s} - \sqrt{\frac{D_2^2 - 4D_1D_3}{s^2}}}{2D_1}$$

$$m_3 = m_2 - m_1 \quad (60)$$

از مبحث تبدیل لاپلاس تبدیل‌های معکوس زیر را

می‌توانیم به دست آوریم (اشپیگل [۳۳]):

$$\frac{e^{r\sqrt{s}}}{s} \quad \frac{e^{r\sqrt{s}}}{s^2}$$

$$\frac{e^{r\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} \quad \frac{e^{r\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}}$$

$$(61)$$

تبدیل‌های معکوس عبارات رابطه (۶۱) با عنوان

توابع $A_{ij}[a, t]$ در پیوست (ب) ارائه شده‌اند. اکنون با استفاده از تبدیل عکس لاپلاس عبارات رابطه (۶۱) یا توابع $A_{ij}[a, t]$ تبدیل عکس لاپلاس عبارات روابط (۵۸) و در نتیجه توابع گرین رابطه (۵۷) را در فضای زمان می‌توان به دست آورد. به همین منظور توابع واسط $\psi_i[r, t]$ را که در پیوست (د) ارائه داده شده‌اند، تعریف می‌کنیم. با داشتن ضرائب K_{ij} و توابع واسط $\psi_i[r, t]$ ، توابع گرین در فضای زمان نیز به دست خواهند آمد که در روابط (۶۳) ارائه شده‌اند. با تعریف توابع Θ_i :

$$\Theta_1[r, t] = K_{11}\psi_1[r, t] + K_{12}\psi_2[r, t] + K_{13}\psi_3[r, t]$$

$$\Theta_2[r, t] = K_{21}\psi_4[r, t] + K_{22}\psi_5[r, t] + K_{23}\psi_6[r, t]$$

$$\Theta_3[r, t] = K_{21}\psi_1[r, t] + K_{22}\psi_2[r, t] + K_{23}\psi_3[r, t]$$

$$(62)$$

توابع g_{ij} عبارت خواهند بود از:

$$g_{ij}[r, x_i, x_j, t] = \frac{\delta_{ij}}{r} \Theta_1[r, t] + \frac{1}{r^5} (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) \Theta_2[r, t] + \frac{x_i x_j}{r^3} \Theta_3[r, t]$$

$$g_{4i}[r, x_i, t] = -\frac{x_i}{r^3} (K_{31}\psi_7[r, t] + K_{32}\psi_8[r, t])$$

$$g_{5i}[r, x_i, t] = -\frac{x_i}{r^3} (K_{41}\psi_7[r, t] + K_{42}\psi_8[r, t])$$

$$g_{i4}[r, x_i, t] = -\frac{x_i}{r^3} (K_{51}\psi_4[r, t] + K_{52}\psi_5[r, t])$$

$$g_{i5}[r, x_i, t] = -\frac{x_i}{r^3} (K_{61}\psi_4[r, t] + K_{62}\psi_5[r, t])$$

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{r} \Gamma_1 + \frac{1}{r^5} (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) \Gamma_2 + \frac{x_i x_j}{r^3} \Gamma_3$$

$$\tilde{g}_{4i} = -\frac{x_i}{r^3} (K_{31}\Omega_7 + K_{32}\Omega_8)$$

$$\tilde{g}_{5i} = -\frac{x_i}{r^3} (K_{41}\Omega_7 + K_{42}\Omega_8)$$

$$\tilde{g}_{i4} = -\frac{x_i}{r^3} (K_{51}\Omega_4 + K_{52}\Omega_5)$$

$$\tilde{g}_{i5} = -\frac{x_i}{r^3} (K_{61}\Omega_4 + K_{62}\Omega_5)$$

$$\tilde{g}_{44} = \frac{1}{r} (K_{71}\Omega_1 + K_{72}\Omega_2)$$

$$\tilde{g}_{45} = \frac{1}{r} K_{73}\Omega_2$$

$$\tilde{g}_{54} = \frac{1}{r} K_{74}\Omega_2$$

$$\tilde{g}_{55} = \frac{1}{r} (K_{75}\Omega_1 + K_{76}\Omega_2) \quad i, j = \overline{1,3}$$

(57)

این توابع به صورت مبسوط نیز در پیوست (ج)

ارائه شده‌اند. توابع واسط $\Omega_i[r]$ در پیوست (د) و ضرائب K_{ij} نیز در پیوست (الف) آورده شده‌اند.

در فضای زمان

برای به دست آوردن تبدیل معکوس لاپلاس توابع

گرین به دست آمده، بایستی تبدیل معکوس توابع رابطه (۵۸) را داشته باشیم:

$$\frac{e^{-r\lambda_2}}{\lambda_2^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \quad \frac{e^{-r\lambda_2}}{\lambda_2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}$$

$$\frac{e^{-r\lambda_2}\lambda_2}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \quad \frac{e^{-r\lambda_2}\lambda_2^2}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}$$

$$\frac{s e^{-r\lambda_2}}{\lambda_2^4(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \quad \frac{s e^{-r\lambda_2}}{\lambda_2^3(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}$$

$$\frac{s e^{-r\lambda_2}}{\lambda_2^2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \quad \frac{s e^{-r\lambda_2}}{\lambda_2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}$$

$$\frac{e^{-r\lambda_2}}{s(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \quad \frac{e^{-r\lambda_2}\lambda_2}{s(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}$$

$$\frac{e^{-r\lambda_2}\lambda_2^2}{s(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \quad \frac{e^{-r\lambda_2}\lambda_2^2}{s(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}$$

(58)

که در آن:

$$\lambda_1 = \sqrt{m_1} \sqrt{s}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{m_2} \sqrt{s}$$

$$\lambda_2^2 - \lambda_1^2 = m_3 s$$

(59)

از میان جملات Ω_i در توابع گرین در فضای تبدیل لاپلاس در پیوست (د)، عباراتی که دارای ضرائب غیر صفر خواهند بود عبارتند از:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \frac{1}{s(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} (e^{-r\lambda_2} \lambda_2^2 - e^{-r\lambda_1} \lambda_1^2) \\ \Omega_4 &= \frac{1}{s(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} (e^{-r\lambda_2} (1+r\lambda_2) - e^{-r\lambda_1} (1+r\lambda_1))\end{aligned}\quad (۶۵)$$

با صفر قراردادن مقادیر ξ ، η و نیز $\hat{u}_{i,i}$ ، کلیه عبارات m_i و به دنبال آن λ_1 و λ_2 نیز صفر خواهند شد. بنابراین لازم است حد جملات Ω_1 و Ω_4 را با میل دادن λ_1 و λ_2 به سمت صفر به دست آوریم که عبارتند از:

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow 0} \{\Omega_1\} &= \frac{1}{s} \\ \lim_{\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow 0} \{\Omega_4\} &= -\frac{r^2}{2s}\end{aligned}\quad (۶۶)$$

جالب است بدانیم که کلیه عبارات Ω_i در توابع گرین در فضای تبدیل لاپلاس که دارای ضرائب صفر هستند، اصلاً دارای حد نیستند و به این ترتیب صفر بودن ضرائب K_{ij} متناظر آنها کاملاً طبیعی و بلکه ضروری است.

با استفاده از مقادیر به دست آمده، نهایتاً توابع گرین در فضای تبدیل لاپلاس پس از ساده‌سازی، به ترتیب زیر به دست خواهند آمد:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{ij} &= \frac{(\lambda+3\mu)r^2\delta_{ij} + (\lambda+\mu)x_i x_j}{8\pi r^3 s \mu (\lambda+2\mu)} \\ \tilde{g}_{4i} &= \tilde{g}_{5i} = 0 \\ \tilde{g}_{i4} &= -\frac{\gamma_a x_i}{8\pi r s (\lambda+2\mu) K_a \rho_a} \\ \tilde{g}_{i5} &= 0 \\ \tilde{g}_{44} &= -\frac{\gamma_a}{4\pi r s K_a \rho_a} \\ \tilde{g}_{45} &= \tilde{g}_{54} = 0 \\ \tilde{g}_{55} &= -\frac{\gamma_w}{4\pi r s K_w \rho_w} \quad i, j = \overline{1,3}\end{aligned}\quad (۶۷)$$

که مقادیر متناظر آنها در فضای زمان عبارتند از:

$$\begin{aligned}g_{ij} &= \frac{(\lambda+3\mu)r^2\delta_{ij} + (\lambda+\mu)x_i x_j}{8\pi r^3 \mu (\lambda+2\mu)} \\ g_{4i} &= g_{5i} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_{44}[r,t] &= \frac{1}{r} (K_{71}\psi_1[r,t] + K_{72}\psi_2[r,t]) \\ g_{45}[r,t] &= \frac{1}{r} K_{73}\psi_2[r,t] \\ g_{54}[r,t] &= \frac{1}{r} K_{74}\psi_2[r,t] \\ g_{55}[r,t] &= \frac{1}{r} (K_{75}\psi_1[r,t] + K_{76}\psi_2[r,t])\end{aligned}\quad (۶۳)$$

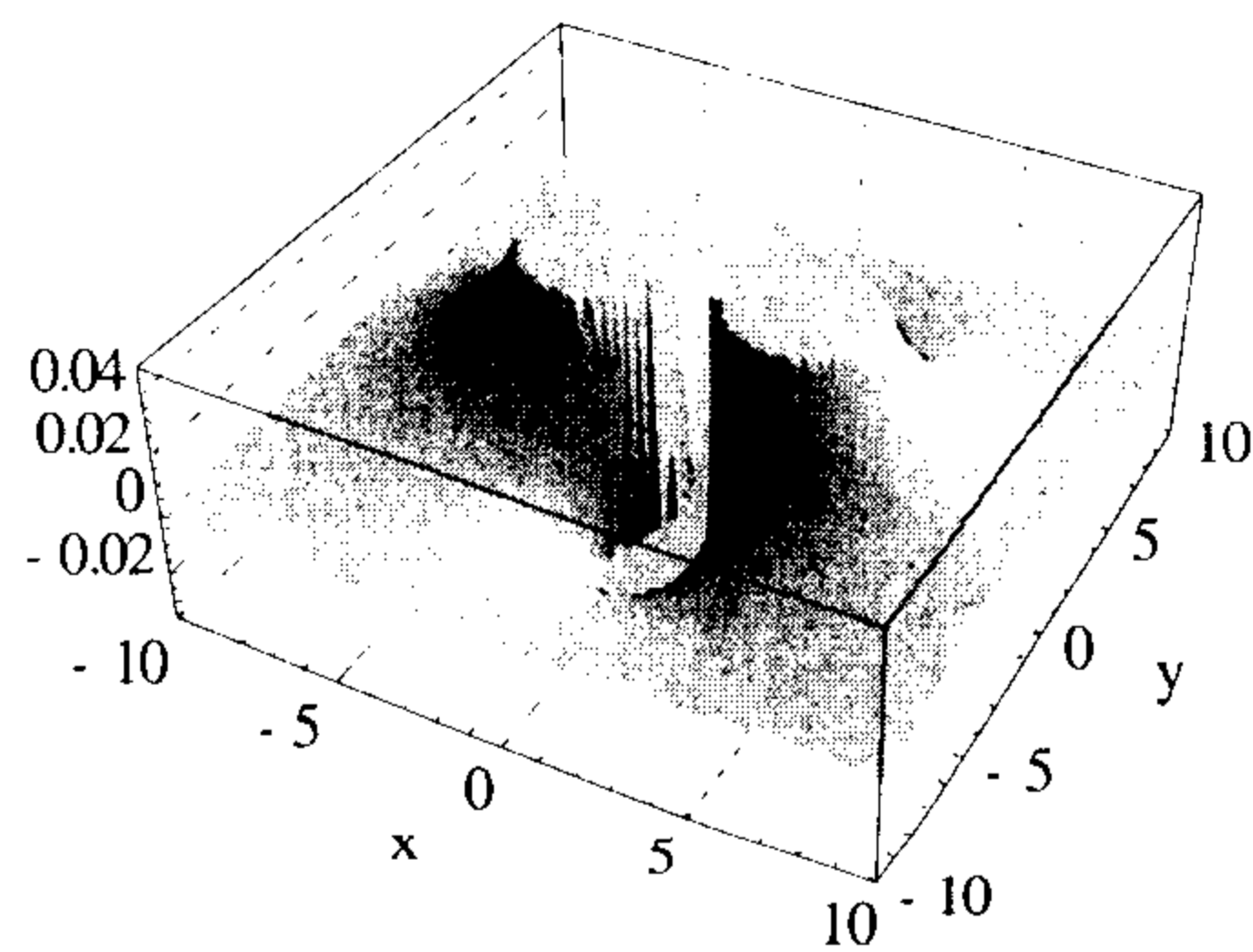
تفسیر نتایج

توابع به دست آمده در فضای تبدیل لاپلاس و همچنین در فضای زمان، به منظور بررسی رفتار آنها و مقایسه با نتایج سایر حالات معادلات حاکم، ترسیم گردیده‌اند. نتایج در هر دو فضای تبدیل لاپلاس و زمان در اشکال (۲) تا (۱۲) نشان داده شده‌اند. از آنجائیکه این توابع تاکنون در مراجع دیگر و با روش‌های متداول استخراج و معرفی نگردیده‌اند، بدیهی است که امکان مقایسه و نیز بررسی دلائل اختلاف و تشابه آنها با نتایج دیگران میسر نیست. اما برای مثال می‌توان نشان داد که اگر شرایط مسئله به سمت شرایط پوروالاستوستاتیک میل کنند، توابع گرین مسئله نیز به سمت توابع گرین پوروالاستوستاتیک میل خواهند نمود. به این منظور و با در نظر گرفتن معادلات (۳۰)، (۳۱) و (۳۲)، کافی است عباراتی را که ضرائب جملات دارای تغییرات زمانی هستند، یعنی \hat{S}_r و \hat{n} را برابر صفر بگذاریم. این کار معادل برابر صفر قرار دادن ξ (یا \hat{S}_r) و η (یا $1-\hat{S}_r$) و نیز $\hat{u}_{i,i}$ در عبارات K_{ij} است. در این صورت تنها ضرائب زیر غیر صفر خواهند ماند:

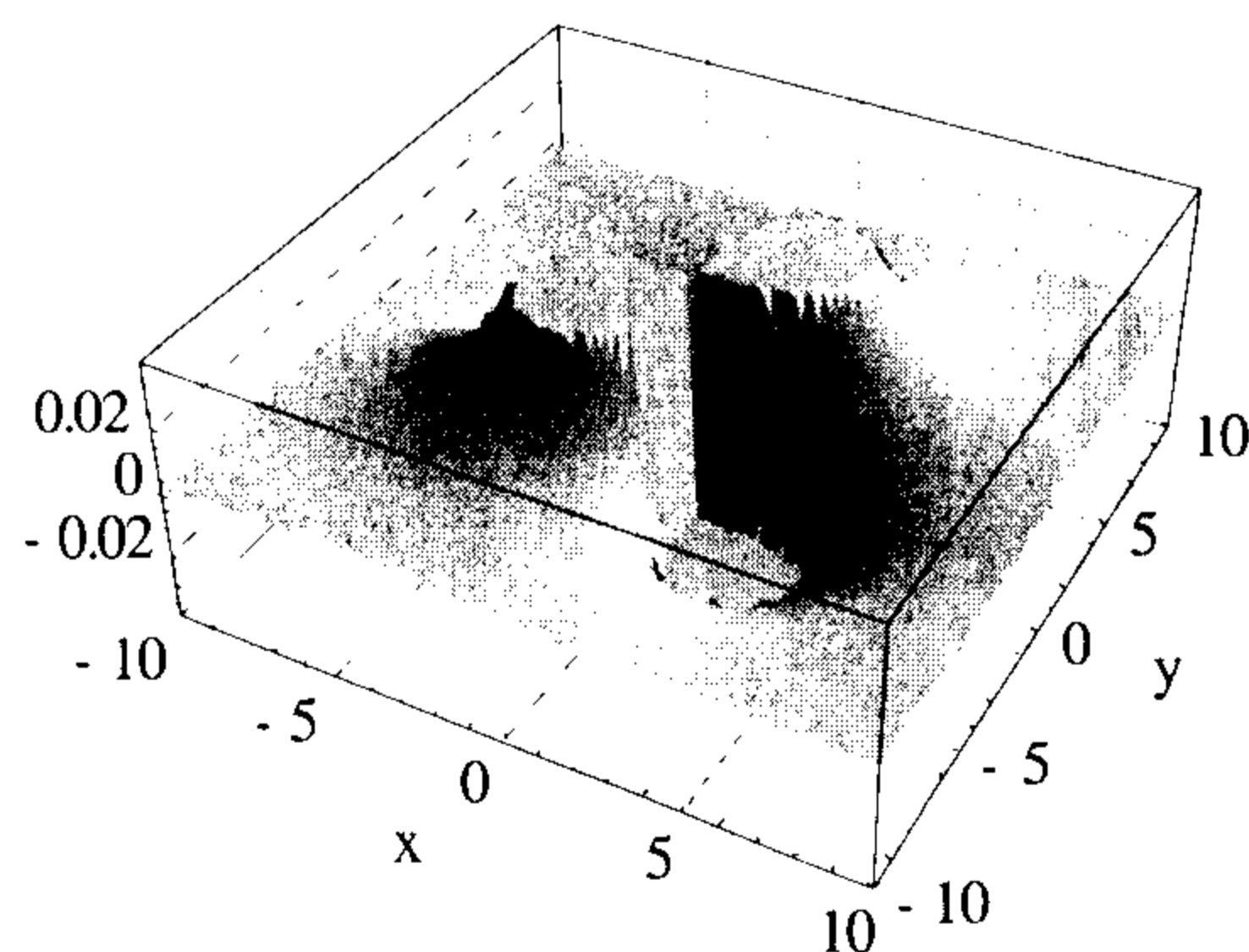
$$\begin{aligned}K_{11} &= \frac{1}{4\pi\mu} \\ K_{21} &= -\frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)} \\ K_{51} &= -\frac{\gamma_a}{4\pi(\lambda+2\mu)K_a\rho_a} \\ K_{71} &= -\frac{\gamma_a}{4\pi K_a\rho_a} \\ K_{75} &= -\frac{\gamma_w}{4\pi K_w\rho_w}\end{aligned}\quad (۶۴)$$

در شکل‌های (۲) تا (۵) $t = 100 s$ و در شکل‌های (۸) تا (۱۲) پارامتر تبدیل لاپلاس برابر واحد منظور شده است. هم چنین شکل‌های (۲) تا (۵) و (۸) تا (۱۰) در $z = 1 m$ رسم گردیده‌اند.

در شکل (۲) تابع g_{11} یا تغییر مکان اسکلت جامد خاک در جهت یک تحت تأثیر وارد شدن نیروی نقطه‌ای واحد در فاصله r نشان داده شده است. همانگونه که دیده می‌شود با ازدیاد مقادیر x و y و در نتیجه بزرگتر شدن r و دور شدن از مبدأ مختصات ($r=0$) تابع g_{11} به سمت صفر میل می‌کند و در ($r=0$) که در واقع تنها نقطه تکین این تابع است، تابع به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. این نتیجه در مورد سایر توابع به دست آمده نیز چه در فضای تبدیل لاپلاس و چه در فضای زمان صدق می‌کند. هم‌چنین در مورد توابع به دست آمده در فضای زمان نیز چنانکه مشاهده می‌شود با گذشت زمان از مقدار مطلق (یا اثر تحریک) آنها کاسته می‌شود. مقایسه دو به دو توابع گرین به دست آمده در دو فضای تبدیل لاپلاس و زمان (g_{ij} و \tilde{g}_{ij}) نیز نشان می‌دهد که همانطور که انتظار می‌رود شکل کلی این توابع در دو فضا یکسان است.



شکل ۲: تابع گرین g_{11} .



شکل ۳: تابع گرین g_{12} .

$$g_{i4} = -\frac{\gamma_a x_i}{8\pi r(\lambda + 2\mu)K_a \rho_a}$$

$$g_{i5} = 0$$

$$g_{44} = -\frac{\gamma_a}{4\pi r K_a \rho_a}$$

$$g_{45} = g_{45} = 0$$

$$g_{55} = -\frac{\gamma_w}{4\pi r K_w \rho_w} \quad i, j = \overline{1,3}$$

(۶۸)

که دقیقاً معادل توابع گرین مسئله پوروالاستوستاتیک هستند (گتمیری و جباری [۲۳] و بنرجی [۴]).

همچنین شکل توابع گرین را از نقطه نظر ریاضی

و بر حسب r ، می‌توان به دست آورد. از آنجائیکه:

$$\psi_i = f(r^0) \quad i = 1, 2, 3, 7, 8$$

$$\psi_i = f(r^0, r^1, r^2) \quad i = 4, 5, 6$$

(۶۹)

شکل توابع گرین به صورت زیر است:

$$g_{ij} = f(r^{-3}, r^{-2}, r^{-1})$$

$$g_{i4}, g_{i5} = f(r^{-3}, r^{-2})$$

$$g_{4i}, g_{5i} = f(r^{-3}, r^{-2}, r^{-1}, r^0)$$

$$g_{44}, g_{45}, g_{54}, g_{55} = f(r^{-1}) \quad i, j = \overline{1,3}$$

(۷۰)

که همگی آنها هنگامی که $r \rightarrow \infty$ ، دارای حد بوده و به سمت صفر میل می‌کنند و تکینگی آنها نیز تنها در نقطه $r=0$ است.

اشکال (۲) تا (۱۲) با استفاده از مقادیر اولیه زیر

ترسیم گردیده‌اند:

$$E = 3 \times 10^4 \text{ kPa} \quad \nu = 0.35$$

$$g = 9.806 \text{ m/s}^2 \quad D_s = 1$$

$$\alpha = 1 \quad \beta = -1 \times 10^{-3} (\text{kPa})^{-1}$$

$$p_a(t=0) = 100 \text{ kPa} \quad p_w(t=0) = 10 \text{ kPa}$$

$$\hat{p}_a = 110 \text{ kPa} \quad \hat{p}_w = 12 \text{ kPa}$$

$$\hat{u}_{i,j} = 0.05 \quad e_0 = 0.75$$

$$\rho_a = 1.293 \text{ kg/m}^3 \quad \rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$$

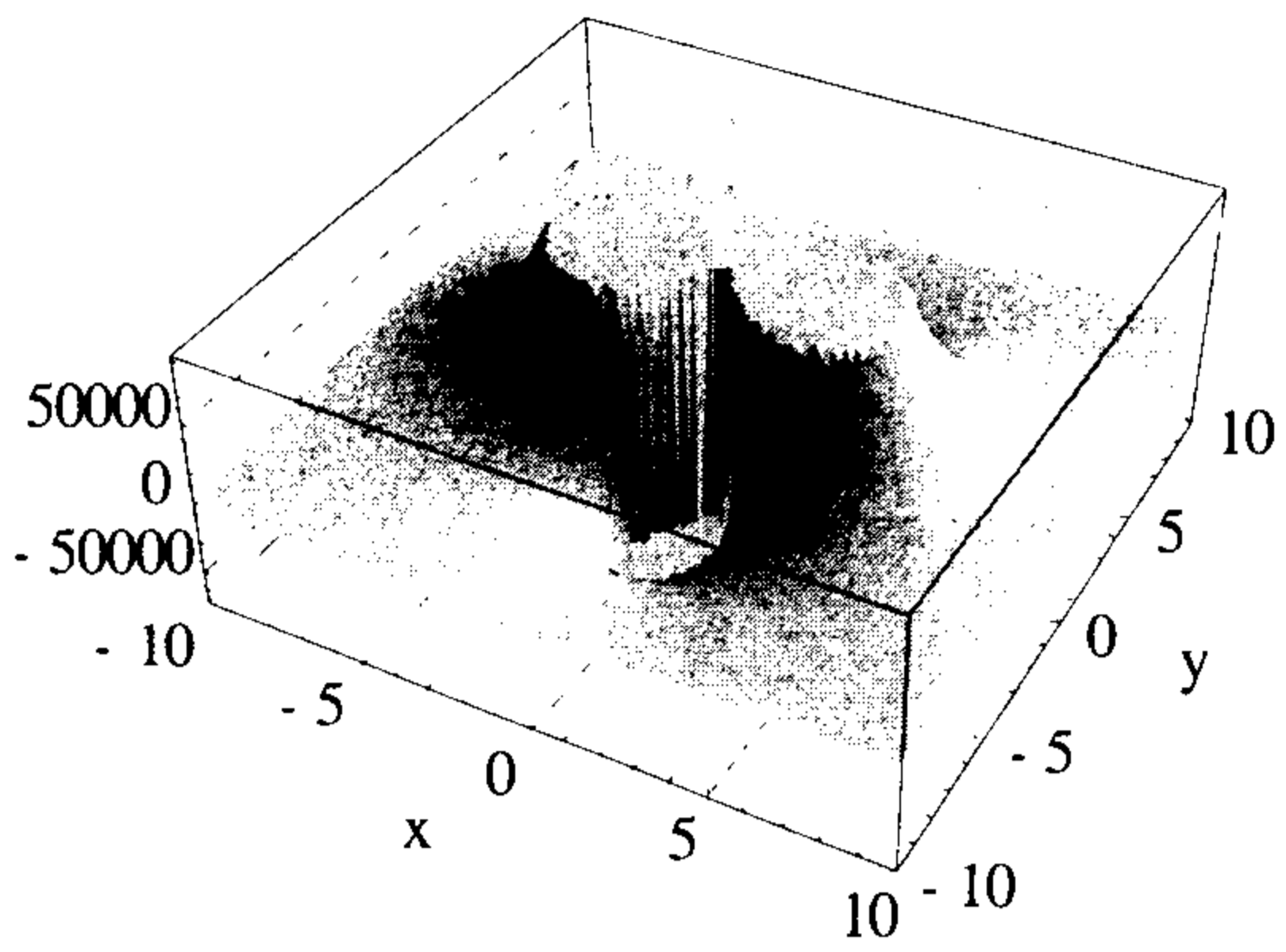
$$\mu_a = 1.85 \times 10^{-5} \text{ kg/ms}$$

$$a_k = 1.2 \times 10^{-9} \text{ m/s} \quad \alpha_k = 5$$

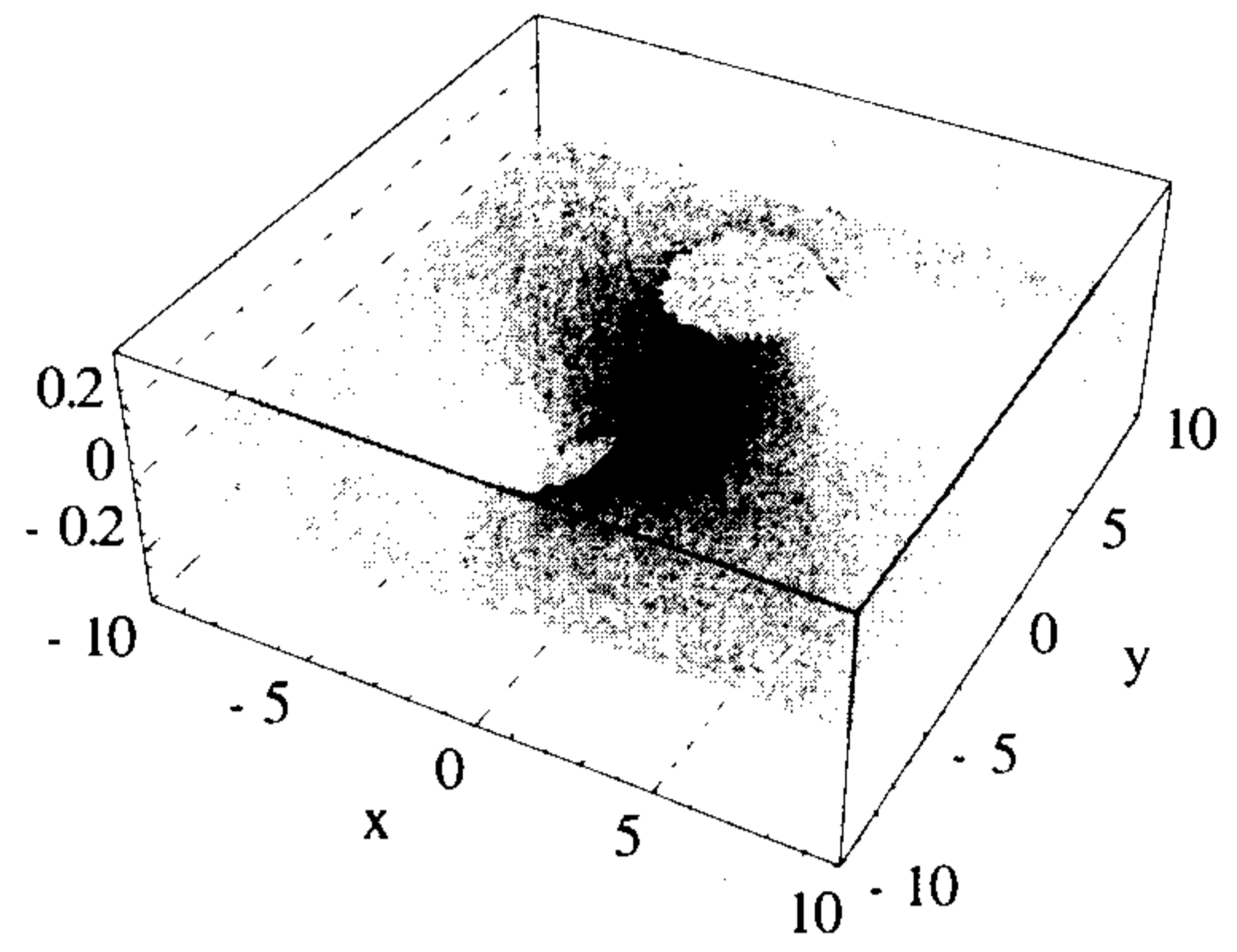
$$S_r = 0.5 \quad S_{ru} = 0.05$$

$$D_k = 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \quad E_k = 2.6$$

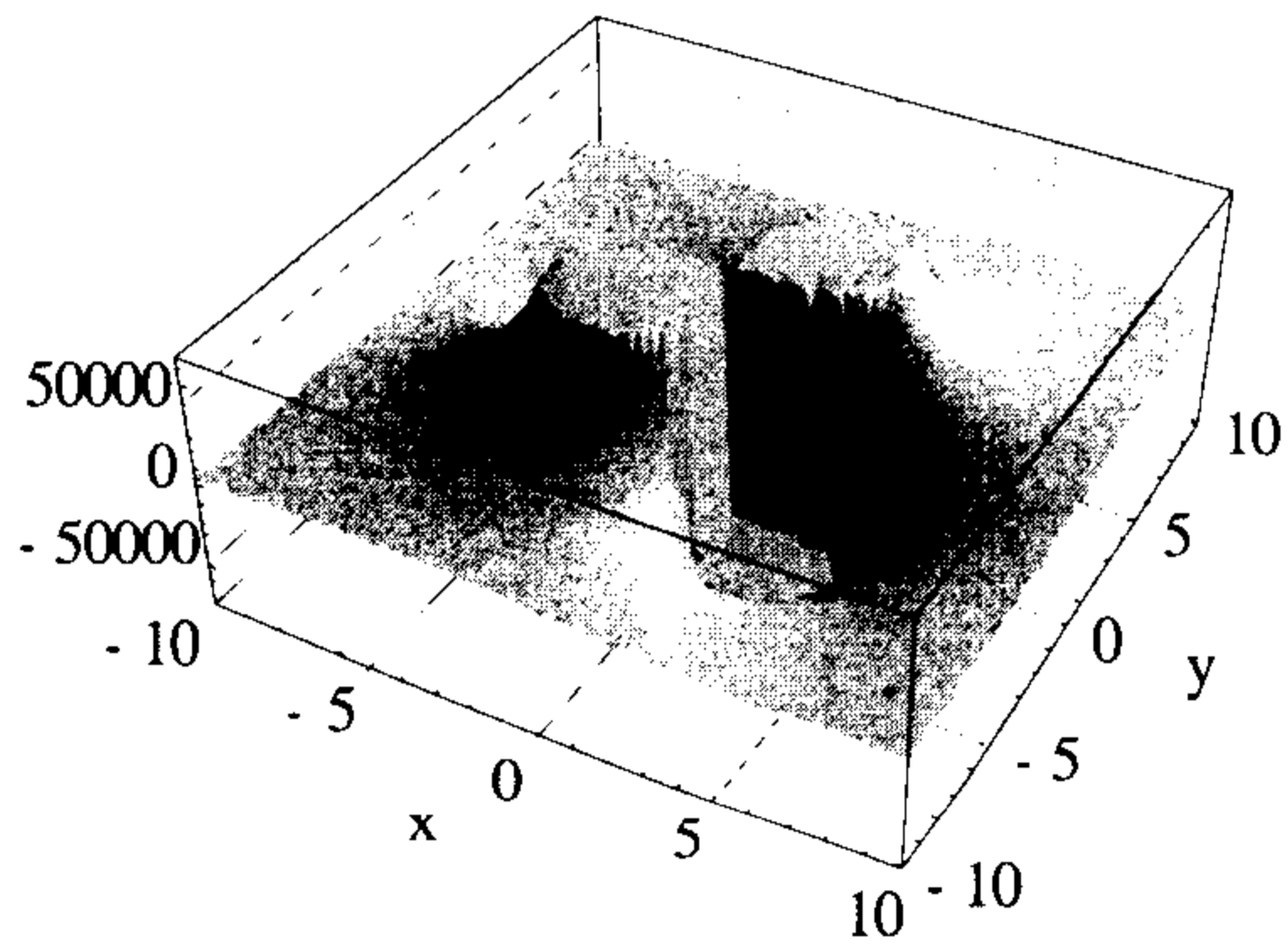
(۷۱)



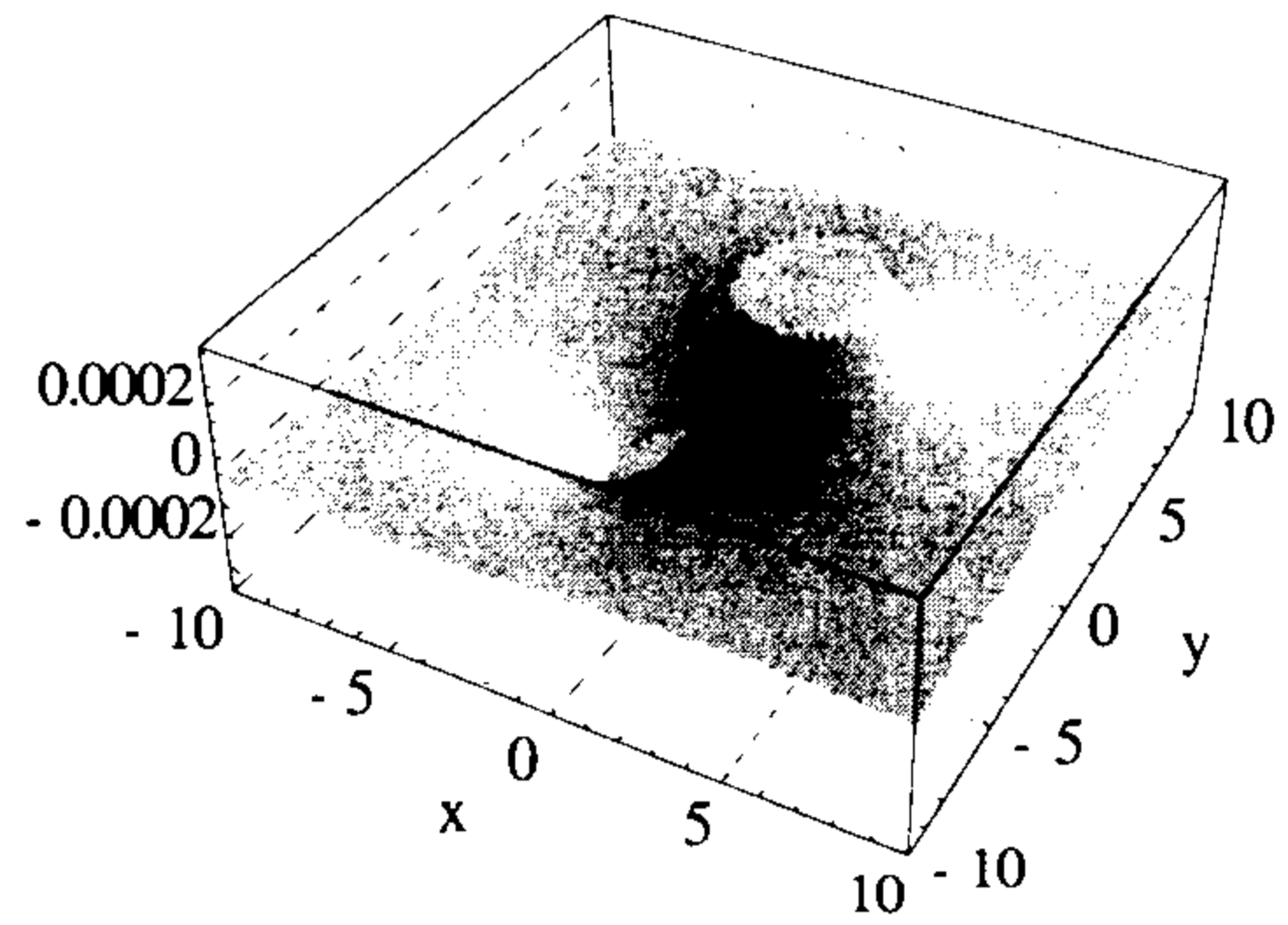
شکل ۸: تابع گرین g_{11} در فضای تبدیل لاپلاس.



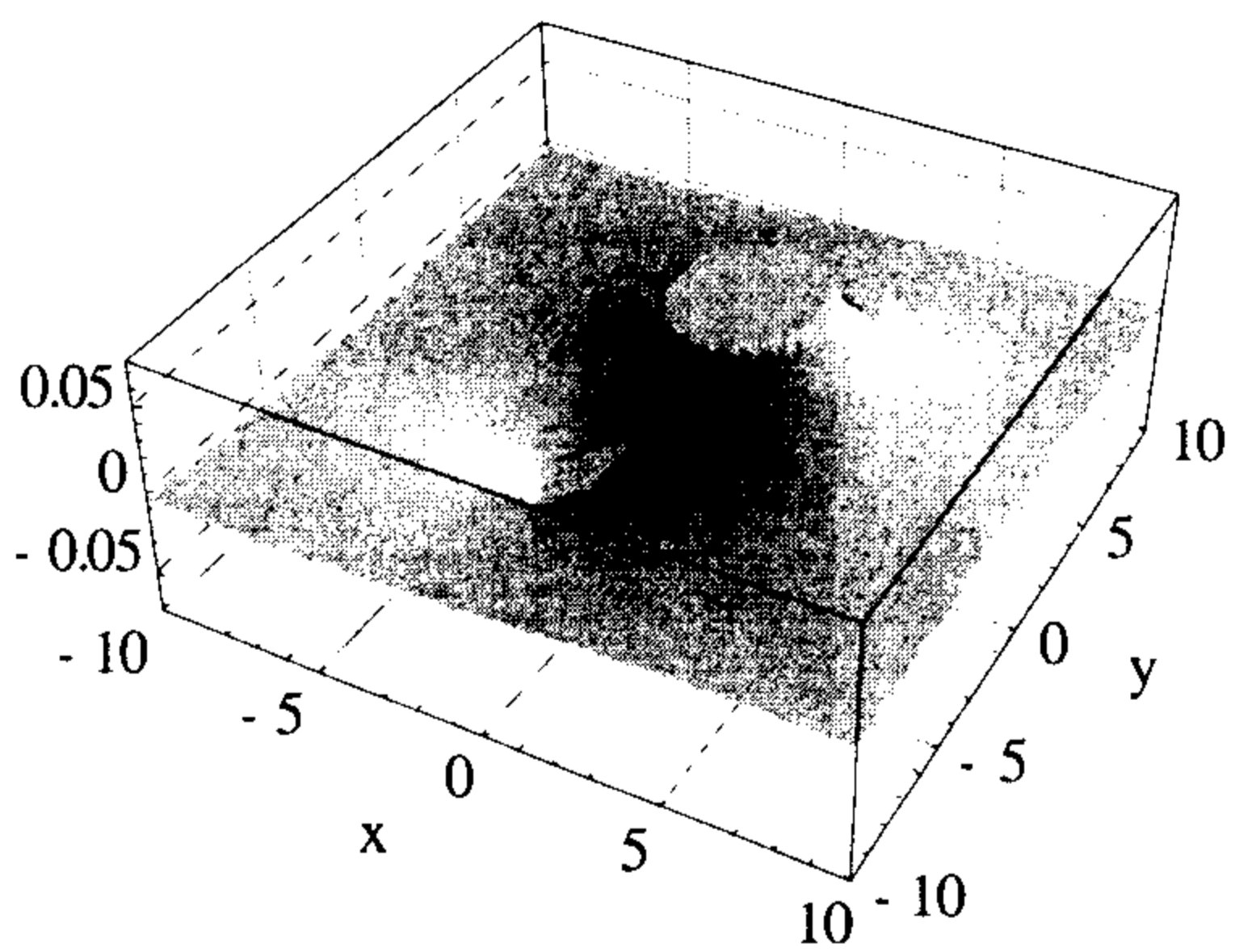
شکل ۴: تابع گرین g_{14} .



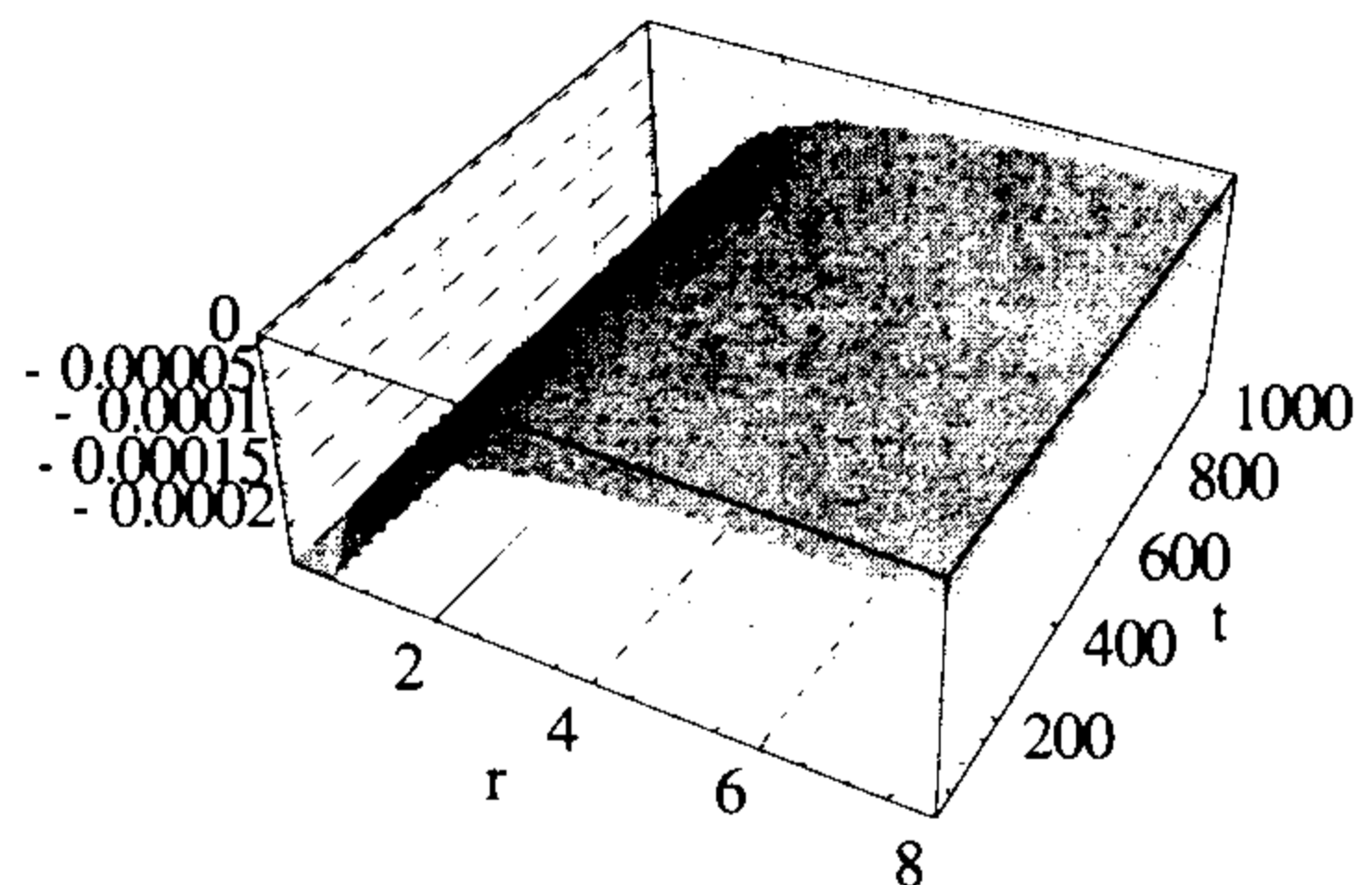
شکل ۹: تابع گرین g_{12} در فضای تبدیل لاپلاس.



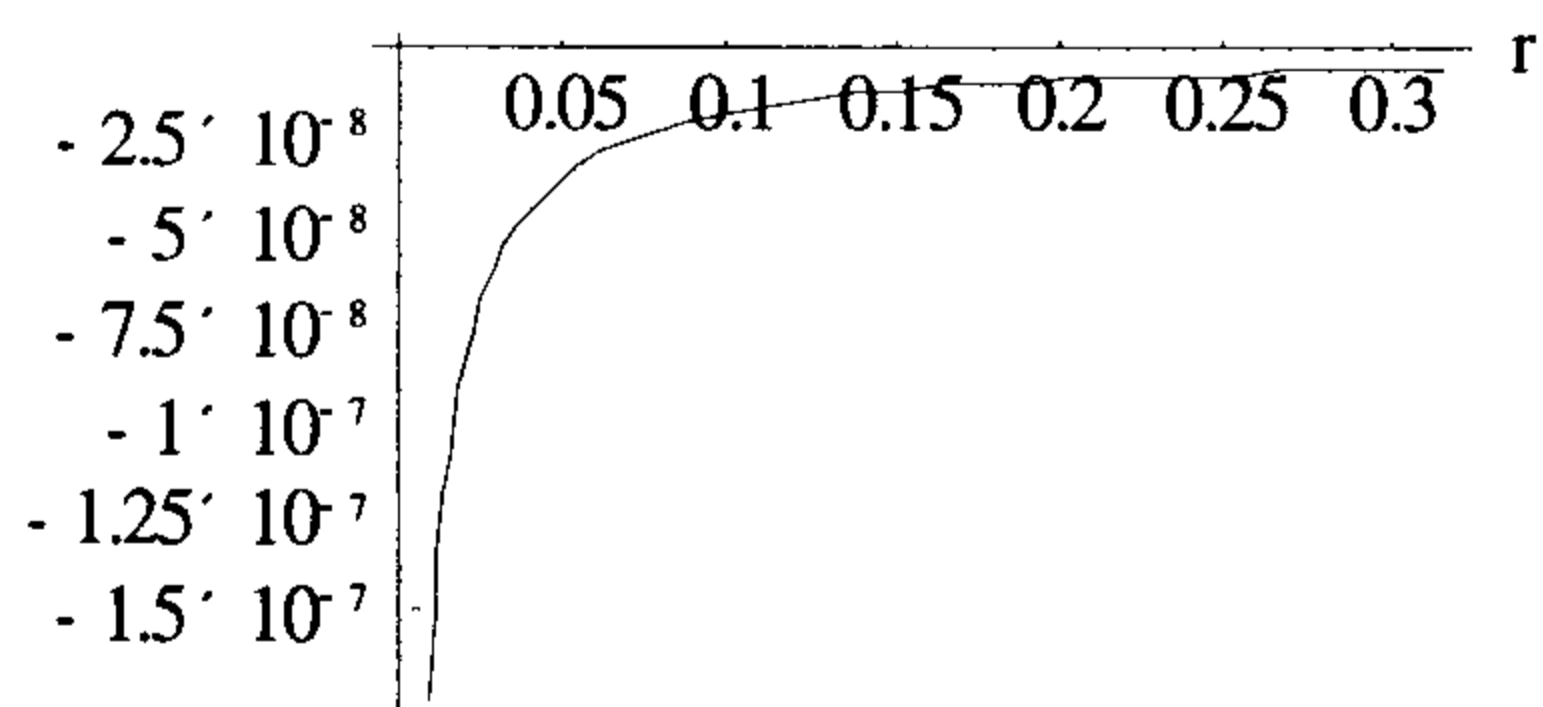
شکل ۵: تابع گرین g_{15} .



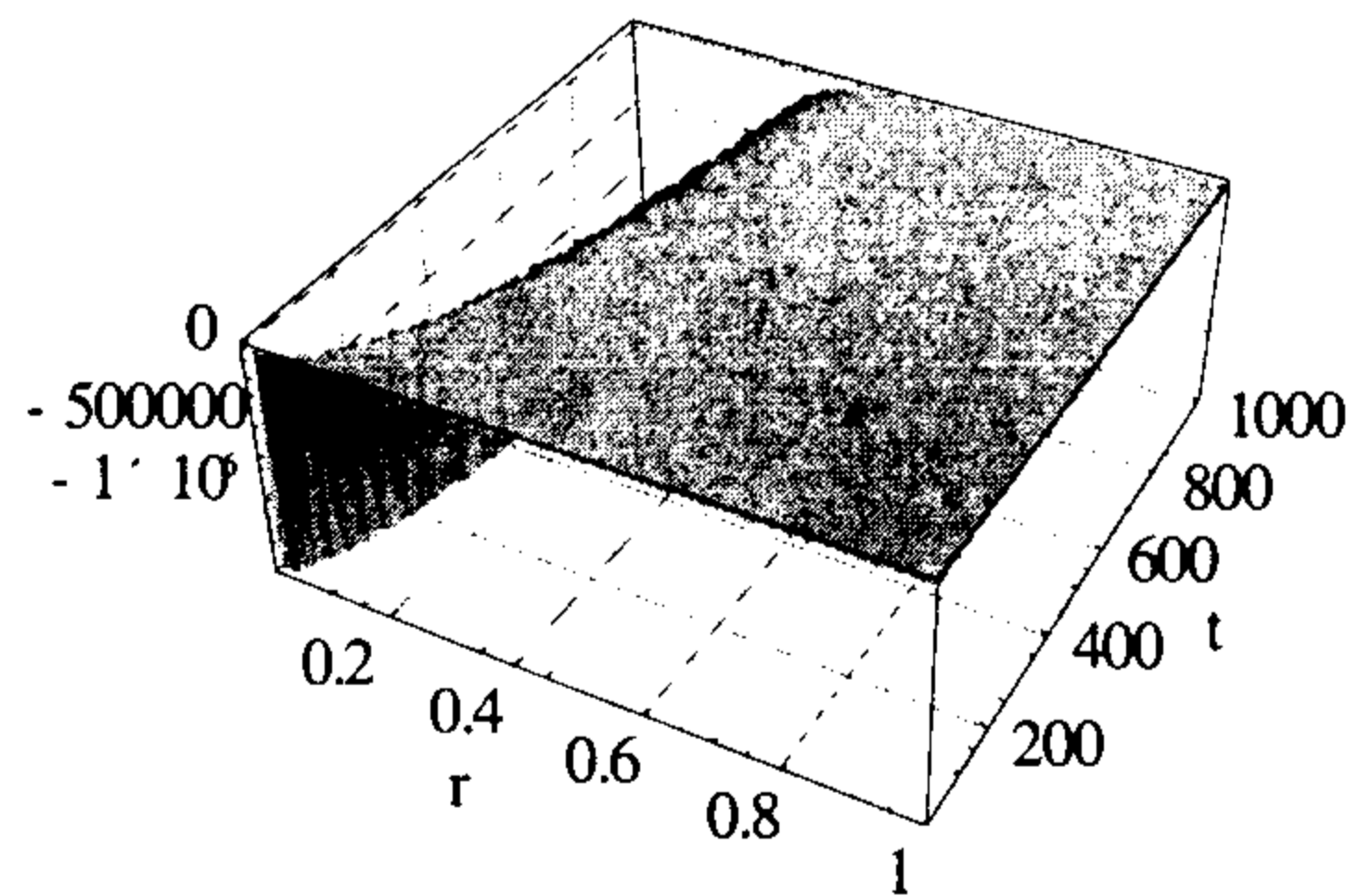
شکل ۱۰: تابع گرین g_{14} در فضای تبدیل لاپلاس.



شکل ۶: تابع گرین g_{45} .



شکل ۱۱: تابع گرین g_{45} در فضای تبدیل لاپلاس.

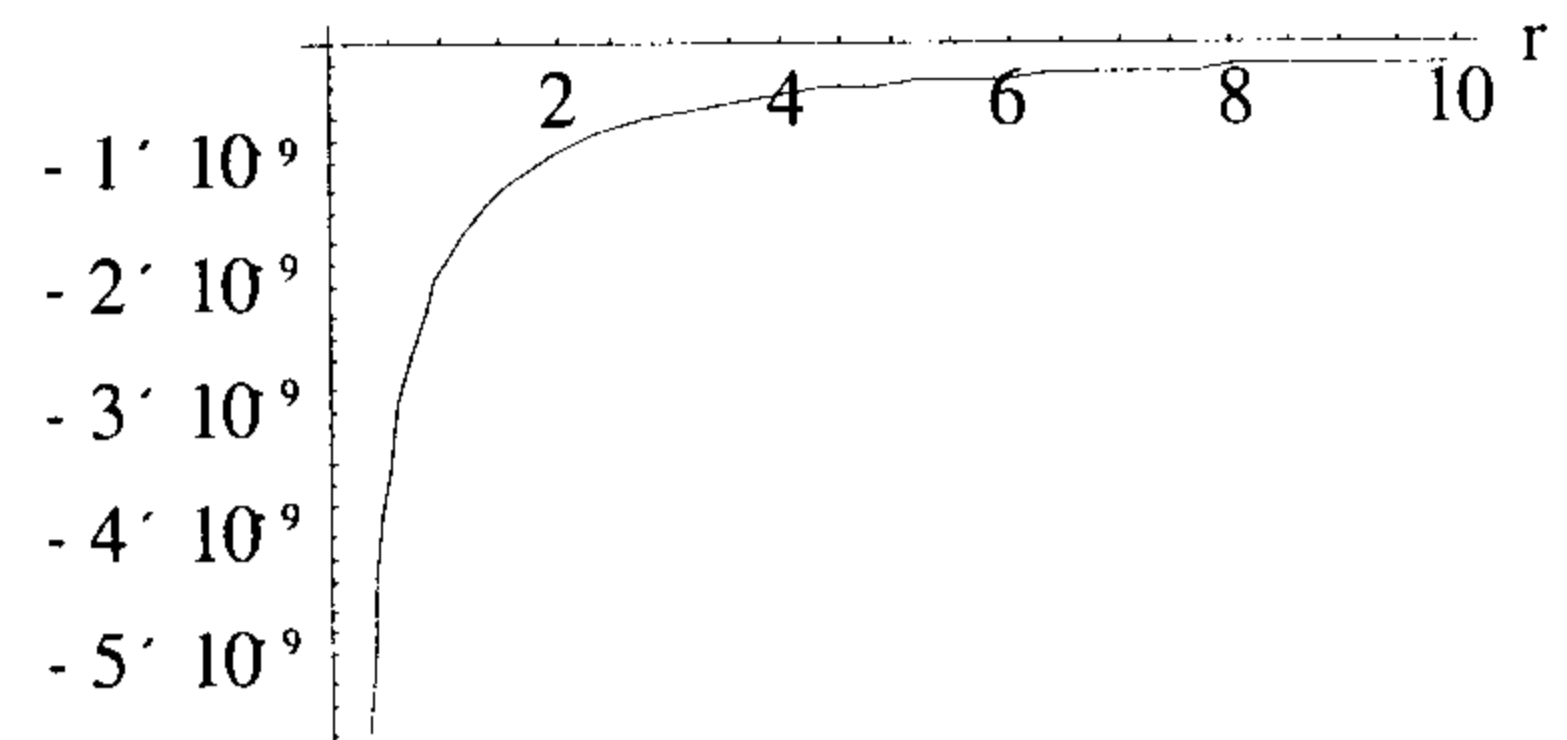


شکل ۷: تابع گرین g_{55} .

شده است که با میل نمودن شرائط مسئله به سمت شرائط پوروالاستوستاتیک، این توابع نیز به سمت توابع گرین حالت پوروالاستوستاتیک میل می‌کنند.

تقدیر و تشکر

انجام این تحقیق با استفاده از مساعدت مالی معاونت محترم پژوهشی دانشگاه تهران در قالب طرح پژوهشی شماره ۶۱۴/۳/۷۳۳ صورت گرفته است. نویسندگان مراتب تشکر خود را از معاونت‌های محترم پژوهشی دانشگاه تهران، دانشکده فنی و گروه مهندسی عمران برای برخورداری از این مساعدت اعلام می‌دارند. نویسندگان همچنین دقت قابل ستایش داوران محترم نشریه در بررسی این مقاله را شایسته تقدیر می‌دانند.



شکل ۱۲: تابع گرین G_{55} در فضای تبدیل لاپلاس.

نتیجه‌گیری

در این تحقیق، توابع گرین سه بعدی معادلات حاکم بر خاک‌های غیراشباع، شامل معادلات تعادل با رفتار خطی ارتجاعی و دو معادله جریان هوا و آب، در فضای تبدیل لاپلاس و در فضای زمان به شکل کاملاً بسته، برای نخستین بار معرفی شده‌اند. این توابع ترسیم گردیده‌اند و به منظور اطمینان از صحت آنها، نشان داده

مراجع

- 1 - Aitchison, G. D. and Woodburn, J. A. (1969). "Soil suction in foundation design." *Proceeding of 7th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Vol. 2, PP. 1-9.
- 2 - Alonso, E. E. and Lloret, A. (1980). "Consolidation of unsaturated soils including swelling and collapse behavior." *Géotechnique*, Vol. 30, No. 4, PP. 449-477.
- 3 - Arfken, G. B. and Weber, H. J. (2001). *Mathematical methods for physicists*. Harcourt science and technology company, London.
- 4 - Banerjee, P. K. (1994). *The boundary element methods in engineering*. McGraw-Hill Book Company, England.
- 5 - Beer, G. (2001). *Programming the boundary element method*. John Wiley & Sons, Inc., England.
- 6 - Biot, M. A. (1956). "General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material." *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 23, PP. 91-96.
- 7 - Bishop, A. W. and Blight, G.E. (1963). "Some aspects of effective stress in saturated and partly saturated soils." *Geotechnique*, Vol. 13, No. 3, PP. 177-197.
- 8 - Bonnet, G. (1987). "Basic singular solutions for a poroelastic medium in a dynamic range." *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 82, No. 5, PP. 1758-1762.
- 9 - Brebbia, C. A. and Dominguez, J. (1992). *Boundary elements, an introductory course*. McGraw-Hill Book Company, New York.
- 10 - Burland, J. B. (1965). "Some aspects of the mechanical behaviour of partly saturated soils." *Proceeding of Conference on Moisture Equilibria and Moisture Changes in Soil Beneath Covered Areas (edited by Aitchison, G.D.)*, Butterworths, London, PP. 270-278.

- 11 - Burridge, R. and Vargus, C. A. (1979). "The fundamental solution in dynamic poroelasticity." *Geophysics Journal of the Royal Astronomical Society*, Vol. 58, PP. 61-90.
- 12 - Chen, J. (1994). "Time domain fundamental solution to Biot's complete equations of poroelasticity: Part I two-dimensional solution." *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 31, No. 10, PP. 147-1490.
- 13 - Chen, J. (1994). "Time domain fundamental solution to Biot's complete equations of poroelasticity: Part II three-dimensional solution." *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 31, No. 2, PP. 169-202.
- 14 - Cheng, A. H. D. and Liggett, J. A. (1984). "Boundary integral equation method for linear porous-elasticity with applications to soil consolidation." *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, PP. 279-296.
- 15 - Cleary, M. P. (1977). "Fundamental solutions for a fluid-saturated porous solid." *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 13, PP. 785-806.
- 16 - Darcy, H. (1856). "*Les fontaines publiques de la ville de Dijon.*" V. Dalmont, Paris.
- 17 - Dominguez, J. (1992). "Boundary element approach for dynamic poroelastic problems." *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35, PP. 307-324.
- 18 - Fredlund, D. G. and Morgenstern, N. R. (1976). "Constitutive relations for volume change in unsaturated soil." *Canadian Geotechnique Journal*, Vol. 13, No. 3, PP. 261-276.
- 19 - Fredlund, D. G. and Morgenstern, N. R. (1977). "Stress state variables for unsaturated soils." *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, Vol. 103, No. 5, PP. 447-466.
- 20 - Fredlund, D. G. and Rahardjo, H. (1993). *Soil mechanics for unsaturated soils*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- 21 - Gatmiri, B., Delage, P. and Cerrolaza, M. (1998). "UDAM: A powerful finite element software for the analysis of unsaturated porous media." *Advances in Engineering Software*, Vol. 29, No. 1, PP. 29-43.
- 22 - Gatmiri, B. and Delage, P. (1995). "A new void ratio state surface formulation for the nonlinear elastic constitutive modelling of unsaturated soil." *Unsaturated Soils (edited by E.E. Alonso and P. Delage)*, Balkema, Vol. 2, PP. 1049-1056.
- 23 - Gatmiri, B. and Jabbari, E. (2004). "Three-dimensional time-independent Green's functions for unsaturated soils. *Proceeding of 5th international conference on Boundary Element Techniques (edited by Aliabadi, M.H. and Leitão V.M.A.)*, Lisbon, PP. 223-227.
- 24 - Gatmiri, B. and Kamalian, M. (2002). "On the fundamental solution of dynamic poroelastic boundary integral equations in the time domain." *International Journal of Geomechanics*, Vol. 2, No. 4, PP. 381-398.
- 25 - Kaynia, A. M. and Banerjee, P.K. (1993). "Fundamental solutions of Biot's equations of dynamic poroelasticity." *International Journal of Engineering Science*, Vol. 31, No. 5, PP. 817-830.
- 26 - Kupradze, V. D. (1979). *Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity*. North-Holland, Netherlands.
- 27 - Lambe, T. W. and Whitman, R.V. (1969). *Soil mechanics*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- 28 - Matyas, E. L. and Radhakrishna, H. S. (1968). "Volume change characteristics of partially saturated soils." *Géotechnique*, Vol. 18, No. 4, PP. 432-448.
- 29 - Norris, A. N. (1985). "Radiation from a point source and scattering theory in a fluid-saturated porous solid." *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 77, PP. 2012-2023.

- 30 - Nowacki, W. (1966). "Green's functions for a thermoelastic medium (quasistatic problems)." *Bull. Inst. Polit. Jasi. Sierie Noua*, Vol. 12, No. 3-4, PP. 83-92.
- 31 - Ocondon, J. et al. (1999). *Applied partial differential equations*. Oxford, England.
- 32 - Osterberg, J. O. (1963). "Compression of partially saturated cohesive soils." *Journal of Soil Mechanics and Foundation Engineering, ASCE*, Vol. 89, SM4: 1-24.
- 33 - Schanz, M. and Pryl, D. (2004) "Dynamic fundamental solutions for compressible and incompressible modeled poroelastic continua." *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, No. 15, PP. 4047-4073.
- 34 - Spiegel, M. R. (1963). *Mathematical handbook*. McGraw-Hill Book Company, New York.

واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- | | |
|------------------------------|--------------------------------|
| 1 - Green's function | 14 - Coupled equations |
| 2 - Fundamental solution | 15 - Generalized Darcy's law |
| 3 - Time-dependent | 16 - Conservation law |
| 4 - Time-independent | 17 - Constitutive relation |
| 5 - Unsaturated soil | 18 - Kernel function |
| 6 - Partially saturated soil | 19 - Dirac Delta function |
| 7 - Porous media | 20 - Laplace transform |
| 8 - Quasi-static | 21 - Inverse Laplace transform |
| 9 - Desiccation | 22 - Helmholtz equation |
| 10 - Humidification | 23 - Laplace transform domain |
| 11 - Hysteresis effect | 24 - Time-domain |
| 12 - Full-space | |
| 13 - Boundary element method | |

پیوست (الف)

ضرائب F_{ij} :

$$F_{11} = c_{12}(c_{11} + c_{12})c_{23}c_{33}$$

$$F_{12} = c_{12}(-c_{14}c_{23}c_{31} - c_{13}c_{21}c_{33} + (c_{11} + c_{12})(c_{22}c_{33} + c_{23}c_{34}))$$

$$F_{13} = c_{12}(c_{14}(c_{21}c_{32} - c_{22}c_{31}) + c_{13}(c_{24}c_{31} - c_{21}c_{34}) - (c_{11} + c_{12})(c_{24}c_{32} - c_{22}c_{34}))$$

$$F_{21} = -c_{11}c_{12}c_{23}c_{33}$$

$$F_{22} = c_{12}(c_{14}c_{23}c_{31} + c_{13}c_{21}c_{33} - c_{11}(c_{22}c_{33} + c_{23}c_{34}))$$

$$F_{23} = c_{12}(c_{14}(c_{22}c_{31} - c_{21}c_{32}) + c_{13}(c_{21}c_{34} - c_{24}c_{31}) + c_{11}(c_{24}c_{32} - c_{22}c_{34}))$$

$$F_{31} = -c_{12}^2c_{21}c_{33}$$

$$F_{32} = c_{12}^2(c_{24}c_{31} - c_{21}c_{34})$$

$$F_{41} = -c_{12}^2c_{23}c_{31}$$

$$F_{42} = c_{12}^2(c_{21}c_{32} - c_{22}c_{31})$$

$$F_{51} = -c_{12}^2c_{13}c_{33}$$

$$F_{52} = c_{12}^2(c_{14}c_{32} - c_{13}c_{34})$$

$$F_{61} = -c_{12}^2c_{14}c_{23}$$

$$F_{62} = c_{12}^2(c_{13}c_{24} - c_{14}c_{22})$$

$$F_{71} = c_{12}^2(c_{11} + c_{12})c_{33}$$

$$F_{72} = c_{12}^2(-c_{14}c_{31} + (c_{11} + c_{12})c_{34})$$

$$F_{73} = -c_{12}^2(c_{11} + c_{12})c_{24}$$

$$F_{74} = -c_{12}^2(-c_{13}c_{31} + (c_{11} + c_{12})c_{32})$$

$$F_{75} = c_{12}^2(c_{11} + c_{12})c_{23}$$

$$F_{76} = c_{12}^2(-c_{13}c_{21} + (c_{11} + c_{12})c_{22})$$

ثابت‌های K_{ij} :

$$\xi = \alpha + \beta(\hat{p}_a - \hat{p}_w)$$

$$\eta = 1 - \xi$$

$$K_{11} = \frac{F_{11}}{4\pi D_1} = \frac{1}{4\pi\mu}$$

$$K_{12} = \frac{F_{12}}{4\pi D_1 s} = \frac{\beta(\lambda + 2\mu)(K_a \gamma_w + K_w \gamma_a) \hat{u}_{i,i} - K_w \gamma_a \eta (1 - D_s) - K_a \gamma_w \xi D_s}{4\pi \mu (\lambda + 2\mu) K_a K_w}$$

$$K_{13} = \frac{F_{13}}{4\pi D_1 s^2} = -\frac{\beta \gamma_a \gamma_w \hat{u}_{i,i}}{4\pi \mu (\lambda + 2\mu) K_a K_w}$$

$$K_{21} = \frac{F_{21}}{4\pi D_1} = -\frac{\lambda + \mu}{4\pi \mu (\lambda + 2\mu)}$$

$$K_{22} = \frac{F_{22}}{4\pi D_1 s} = -\frac{\beta(\lambda + \mu)(K_a \gamma_w + K_w \gamma_a) \hat{u}_{i,i} - K_w \gamma_a \eta (1 - D_s) - K_a \gamma_w \xi D_s}{4\pi \mu (\lambda + 2\mu) K_a K_w}$$

$$K_{23} = \frac{F_{23}}{4\pi D_1 s^2} = -K_{13}$$

$$K_{31} = \frac{F_{31}}{4\pi D_1 s} = \frac{\eta \gamma_a}{4\pi (\lambda + 2\mu) K_a}$$

$$K_{32} = \frac{F_{32}}{4\pi D_1 s^2} = \mu K_{23}$$

$$K_{41} = \frac{F_{41}}{4\pi D_1 s} = \frac{\gamma_w \xi}{4\pi (\lambda + 2\mu) K_w}$$

$$K_{42} = \frac{F_{42}}{4\pi D_1 s^2} = K_{32}$$

$$K_{51} = \frac{F_{51}}{4\pi D_1} = \frac{\gamma_a (1 - D_s)}{4\pi (\lambda + 2\mu) K_a \rho_a}$$

$$K_{52} = \frac{F_{52}}{4\pi D_1 s} = -\frac{\beta \gamma_a \gamma_w \hat{u}_{i,i}}{4\pi (\lambda + 2\mu) K_a K_w \rho_a}$$

$$K_{61} = \frac{F_{61}}{4\pi D_1} = -\frac{D_s \gamma_w}{4\pi (\lambda + 2\mu) K_a K_w \rho_w}$$

$$K_{62} = \frac{F_{62}}{4\pi D_1 s} = -\frac{\beta \gamma_a \gamma_w \hat{u}_{i,i}}{4\pi (\lambda + 2\mu) K_a K_w \rho_w}$$

$$K_{71} = \frac{F_{71}}{4\pi D_1} = -\frac{\gamma_a}{4\pi K_a \rho_a}$$

$$K_{72} = \frac{F_{72}}{4\pi D_1 s} = \frac{\gamma_a \gamma_w (\xi D_s - \beta (\lambda + 2\mu) \hat{u}_{i,i})}{4\pi (\lambda + 2\mu) K_a K_w \rho_w}$$

$$K_{73} = \frac{F_{73}}{4\pi D_1 s} = -\frac{\beta \gamma_a \gamma_w \hat{u}_{i,i}}{4\pi K_a K_w \rho_w}$$

$$K_{74} = \frac{F_{74}}{4\pi D_1 s} = -\frac{\gamma_a \gamma_w (\xi (1 - D_s) + \beta \hat{u}_{i,i} (\lambda + 2\mu))}{4\pi (\lambda + 2\mu) K_a K_w \rho_a}$$

$$K_{75} = \frac{F_{75}}{4\pi D_1} = -\frac{\gamma_w}{4\pi K_w \rho_w}$$

$$K_{76} = \frac{F_{76}}{4\pi D_1 s} = \frac{\gamma_a \gamma_w (\eta (1 - D_s) - \beta \hat{u}_{i,i} (\lambda + 2\mu))}{4\pi (\lambda + 2\mu) K_a K_w \rho_w}$$

پیوست (ب)

تبدیل‌های معکوس لاپلاس و توابع واسط $\Lambda_{ij}[a, t]$:

$$\operatorname{Erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2} du$$

$$\Lambda_{11}[a, t] = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s} \right\} = \operatorname{Erfc} \left(\frac{a}{2\sqrt{t}} \right)$$

$$\Lambda_{12}[a, t] = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s^2} \right\} = \left(\frac{a^2}{2} + t \right) \operatorname{Erfc} \left(\frac{a}{2\sqrt{t}} \right) - a \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$$

$$\Lambda_{21}[a, t] = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} \right\} = \frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}$$

$$\Lambda_{22}[a, t] = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s^3}} \right\} = 2 e^{-\frac{a^2}{4t}} \sqrt{\frac{t}{\pi}} - a \operatorname{Erfc} \left(\frac{a}{2\sqrt{t}} \right)$$

پیوست (ج)

توابع گرین در فضای تبدیل لاپلاس:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{ij} &= \delta_{ij} \left\{ K_{11} \frac{(e^{-r\lambda_2} \lambda_2^2 - e^{-r\lambda_1} \lambda_1^2)}{rs(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} + K_{12} \frac{(e^{-r\lambda_2} - e^{-r\lambda_1})}{r(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} + K_{13} \frac{s}{r(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left(\frac{e^{-r\lambda_2}}{\lambda_2^2} - \frac{e^{-r\lambda_1}}{\lambda_1^2} \right) \right\} + \\ & K_{21} \frac{1}{r^5 s (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left[(3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) (e^{-r\lambda_2} (1+r\lambda_2) - e^{-r\lambda_1} (1+r\lambda_1)) + x_i x_j r^2 (e^{-r\lambda_2} \lambda_2^2 - e^{-r\lambda_1} \lambda_1^2) \right] + \\ & K_{22} \frac{1}{r^5 (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left[(3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) \left(\frac{e^{-r\lambda_2}}{\lambda_2^2} (1+r\lambda_2) - \frac{e^{-r\lambda_1}}{\lambda_1^2} (1+r\lambda_1) \right) + x_i x_j r^2 (e^{-r\lambda_2} - e^{-r\lambda_1}) \right] + \\ & K_{23} \frac{s}{r^5 (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left[(3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) \left(\frac{e^{-r\lambda_2}}{\lambda_2^4} (1+r\lambda_2) - \frac{e^{-r\lambda_1}}{\lambda_1^4} (1+r\lambda_1) \right) + x_i x_j r^2 \left(\frac{e^{-r\lambda_2}}{\lambda_2^2} - \frac{e^{-r\lambda_1}}{\lambda_1^2} \right) \right] \\ \tilde{g}_{4i} &= -\frac{K_{31} x_i}{r^3} \frac{1}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} (e^{-r\lambda_2} (1+r\lambda_2) - e^{-r\lambda_1} (1+r\lambda_1)) - \frac{K_{32} x_i}{r^3} \frac{s}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left(\frac{e^{-r\lambda_2}}{\lambda_2^2} (1+r\lambda_2) - \frac{e^{-r\lambda_1}}{\lambda_1^2} (1+r\lambda_1) \right) \\ \tilde{g}_{5i} &= -\frac{K_{41} x_i}{r^3} \frac{1}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} (e^{-r\lambda_2} (1+r\lambda_2) - e^{-r\lambda_1} (1+r\lambda_1)) - \frac{K_{42} x_i}{r^3} \frac{s}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left(\frac{e^{-r\lambda_2}}{\lambda_2^2} (1+r\lambda_2) - \frac{e^{-r\lambda_1}}{\lambda_1^2} (1+r\lambda_1) \right) \\ \tilde{g}_{i4} &= -\frac{K_{51} x_i}{r^3} \frac{1}{s(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} (e^{-r\lambda_2} (1+r\lambda_2) - e^{-r\lambda_1} (1+r\lambda_1)) - \frac{K_{52} x_i}{r^3} \frac{1}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left(\frac{e^{-r\lambda_2}}{\lambda_2^2} (1+r\lambda_2) - \frac{e^{-r\lambda_1}}{\lambda_1^2} (1+r\lambda_1) \right) \\ \tilde{g}_{i5} &= -\frac{K_{61} x_i}{r^3} \frac{1}{s(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} (e^{-r\lambda_2} (1+r\lambda_2) - e^{-r\lambda_1} (1+r\lambda_1)) - \frac{K_{62} x_i}{r^3} \frac{1}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left(\frac{e^{-r\lambda_2}}{\lambda_2^2} (1+r\lambda_2) - \frac{e^{-r\lambda_1}}{\lambda_1^2} (1+r\lambda_1) \right) \\ \tilde{g}_{44} &= K_{71} \frac{(e^{-r\lambda_2} \lambda_2^2 - e^{-r\lambda_1} \lambda_1^2)}{rs(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} + K_{72} \frac{(e^{-r\lambda_2} - e^{-r\lambda_1})}{rs(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \\ \tilde{g}_{45} &= K_{73} \frac{(e^{-r\lambda_2} - e^{-r\lambda_1})}{rs(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \\ \tilde{g}_{54} &= K_{74} \frac{(e^{-r\lambda_2} - e^{-r\lambda_1})}{rs(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \\ \tilde{g}_{55} &= K_{75} \frac{(e^{-r\lambda_2} \lambda_2^2 - e^{-r\lambda_1} \lambda_1^2)}{rs(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} + K_{76} \frac{(e^{-r\lambda_2} - e^{-r\lambda_1})}{rs(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \end{aligned}$$

پیوست (د)

توابع واسط $\Omega_i[r]$:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \frac{e^{-r\lambda_2} \lambda_2^2 - e^{-r\lambda_1} \lambda_1^2}{s(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} & \Omega_2 &= \frac{e^{-r\lambda_2} - e^{-r\lambda_1}}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \\ \Omega_3 &= \frac{s}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left(\frac{e^{-r\lambda_2}}{\lambda_2^2} - \frac{e^{-r\lambda_1}}{\lambda_1^2} \right) & \Omega_4 &= \frac{1}{s(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} (e^{-r\lambda_2} (1+r\lambda_2) - e^{-r\lambda_1} (1+r\lambda_1)) \\ \Omega_5 &= \frac{1}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left(\frac{e^{-r\lambda_2}}{\lambda_2^4} (1+r\lambda_2) - \frac{e^{-r\lambda_1}}{\lambda_1^4} (1+r\lambda_1) \right) & \Omega_6 &= \frac{s}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left(\frac{e^{-r\lambda_2}}{\lambda_2^4} (1+r\lambda_2) - \frac{e^{-r\lambda_1}}{\lambda_1^4} (1+r\lambda_1) \right) \\ \Omega_7 &= \frac{1}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} (e^{-r\lambda_2} (1+r\lambda_2) - e^{-r\lambda_1} (1+r\lambda_1)) & \Omega_8 &= \frac{s}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left(\frac{e^{-r\lambda_2}}{\lambda_2^2} (1+r\lambda_2) - \frac{e^{-r\lambda_1}}{\lambda_1^2} (1+r\lambda_1) \right) \end{aligned}$$

توابع واسط $\Psi_i[r, t]$:

$$\begin{aligned} \Psi_1[r, t] &= \mathcal{L}^{-1}\{\Omega_1\} = \frac{1}{m_3} (m_2 \mathcal{A}_{11}[r\sqrt{m_2}, t] - m_1 \mathcal{A}_{11}[r\sqrt{m_1}, t]) \\ \Psi_2[r, t] &= \mathcal{L}^{-1}\{\Omega_2\} = \frac{1}{m_3} (\mathcal{A}_{11}[r\sqrt{m_2}, t] - \mathcal{A}_{11}[r\sqrt{m_1}, t]) \\ \Psi_3[r, t] &= \mathcal{L}^{-1}\{\Omega_3\} = \frac{1}{m_3} \left(\frac{1}{m_2} \mathcal{A}_{11}[r\sqrt{m_2}, t] - \frac{1}{m_1} \mathcal{A}_{11}[r\sqrt{m_1}, t] \right) \end{aligned}$$

$$\Psi_4[r, t] = \mathcal{L}^{-1}\{\Omega_4\} = \frac{1}{m_3} \left(\Lambda_{12}[r\sqrt{m_2}, t] - \Lambda_{12}[r\sqrt{m_1}, t] \right) + \frac{r}{m_3} \left(\sqrt{m_2} \Lambda_{22}[r\sqrt{m_2}, t] - \sqrt{m_1} \Lambda_{22}[r\sqrt{m_1}, t] \right)$$

$$\Psi_5[r, t] = \mathcal{L}^{-1}\{\Omega_5\} =$$

$$\frac{1}{m_3} \left(\frac{1}{m_2} \Lambda_{12}[r\sqrt{m_2}, t] - \frac{1}{m_1} \Lambda_{12}[r\sqrt{m_1}, t] \right) + \frac{r}{m_3} \left(\frac{1}{\sqrt{m_2}} \Lambda_{22}[r\sqrt{m_2}, t] - \frac{1}{\sqrt{m_1}} \Lambda_{22}[r\sqrt{m_1}, t] \right)$$

$$\Psi_6[r, t] = \mathcal{L}^{-1}\{\Omega_6\} =$$

$$\frac{1}{m_3} \left(\frac{1}{m_2^2} \Lambda_{12}[r\sqrt{m_2}, t] - \frac{1}{m_1^2} \Lambda_{12}[r\sqrt{m_1}, t] \right) + \frac{r}{m_3} \left(\frac{1}{\sqrt[2]{m_2^3}} \Lambda_{22}[r\sqrt{m_2}, t] - \frac{1}{\sqrt[2]{m_1^3}} \Lambda_{22}[r\sqrt{m_1}, t] \right)$$

$$\Psi_7[r, t] = \mathcal{L}^{-1}\{\Omega_7\} = \frac{1}{m_3} \left(\Lambda_{11}[r\sqrt{m_2}, t] - \Lambda_{11}[r\sqrt{m_1}, t] \right) + \frac{r}{m_3} \left(\sqrt{m_2} \Lambda_{21}[r\sqrt{m_2}, t] - \sqrt{m_1} \Lambda_{21}[r\sqrt{m_1}, t] \right)$$

$$\Psi_8[r, t] = \mathcal{L}^{-1}\{\Omega_8\} =$$

$$\frac{1}{m_3} \left(\frac{1}{m_2} \Lambda_{11}[r\sqrt{m_2}, t] - \frac{1}{m_1} \Lambda_{11}[r\sqrt{m_1}, t] \right) + \frac{r}{m_3} \left(\frac{1}{\sqrt{m_2}} \Lambda_{21}[r\sqrt{m_2}, t] - \frac{1}{\sqrt{m_1}} \Lambda_{21}[r\sqrt{m_1}, t] \right)$$