

# ارائه روش ماتریس های تبدیل برای حل مسائل هدایت حرارتی معکوس

فرشاد کوثری

استادیار گروه مهندسی مکانیک- دانشکده فنی- دانشگاه تهران

علی بهبهانی نیا

دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک- دانشکده فنی- دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۱/۱۱/۶، تاریخ تصویب ۸۲/۷/۲۶)

## چکیده

در مقاله حاضر، با ترکیب روش های تخمین توابع متوالی<sup>۱</sup> (SFSM) و روش تقابل دوگانه اجزا مرزی<sup>۲</sup> (DRBEM)، یک روش جدید برای حل مسائل معکوس هدایت حرارتی با خواص ترموفیزیکی ثابت ارائه گردیده است. در روش حاضر تخمین شرط مرزی مجهول با استفاده از دو ماتریس تبدیل صورت می گیرد. این ماتریسها با انجام عملیات ریاضی بر اساس روش تخمین توابع متوالی بر روی ماتریس هائی که در روش تقابل دوگانه اجزا مرزی برای حل مستقیم به کار می روند به دست آمده اند. مسئله ای که مورد بررسی قرار گرفته است، تخمین یک شار حرارتی مجهول اعمال شده به سطح فعال به صورت تابعی از زمان و مکان است. در این مسئله سطوح غیر فعال عایق در نظر گرفته شده اند. برای مقایسه سرعت و دقت روش با روش تخمین توابع متوالی از یک مسئله شبیه سازی شده که از حل تحلیلی به دست آمده، استفاده گردیده است. نتایج حاکی از افزایش قابل توجه در سرعت و همچنین افزایش در دقت است.

**واژه های کلیدی:** هدایت حرارتی معکوس، روش اجزا مرزی، روش تقابل دوگانه اجزا مرزی، روش تخمین توابع متوالی

## مقدمه

مسائل هدایت حرارتی را می توان به دو دسته مستقیم و معکوس تقسیم کرد. در مسائل مستقیم که کاربرد بیشتری دارند، هندسه، خواص ترموفیزیکی، شرایط اولیه و مرزی معلوم هستند. هدف در این مسائل محاسبه دما در داخل ناحیه حل می باشد. در مسائل هدایت حرارتی معکوس، تعدادی از این اطلاعات نامعلوم بوده و در عوض اطلاعات اضافی که معمولا دماهای اندازه گیری شده در داخل ناحیه حل و یا روی مرز است، معلوم میباشند. مسائل معکوس هدایت حرارتی کاربردهای مختلفی دارند. این کاربردها را می توان به سه دسته مسائل کنترلی، طراحی و شناخت [۱] تقسیم کرد. در مسائل کنترلی و شناخت هدف تعیین یک متغیر میباشد که اندازه گیری مستقیم آن ممکن نیست، مانند تعیین ضریب هدایت حرارتی و یا دما بر روی یک سطح که قرار دادن مستقیم دماسنج بر روی آن ممکن نمی باشد. مسائل طراحی معمولا شامل اندازه گیری نیستند بلکه در این مسائل معمولا بهینه کردن یک طرح از طریق یک تابع هدف،

تعریف کننده یک مسئله معکوس است.

مسائل معکوس را به صورت خلاصه میتوان به یافتن علت از طریق اندازه گیری معلول تعریف کرد. این مسائل عموماً بدخیم<sup>۳</sup> می باشند. در مسائلی که هدف تعیین شرط مرزی مجهول از طریق اندازه گیری دما می باشد، دو اثر میرائی<sup>۴</sup> و تاخیر<sup>۵</sup> باعث میشوند جواب مسئله که شرط مرزی مجهول است، به صورت پیوسته ای به ورودی یعنی دماهای قرائت شده بستگی نداشته باشد [۲]. به علت مشکلاتی که گفته شد، یافتن جواب دقیق برای این مسائل معمولا ممکن نیست و جوابهایی که بدست می آیند براساس کمینه کردن یک تابع هدف که معمولا مجموع مربعات خطا انتخاب میشود، می باشند. این کار در اکثر روشهای موجود با نوعی سعی و خطا انجام می گیرد و سعی و خطا به نحوی انجام میشود که تابع هدف کمینه گردد. صورت بارز این کار در روش های تکراری مانند روش گرادیان های مزدوج<sup>۶</sup> میباشد. در این روش شرط مرزی مجهول حدس زده شده و دماها در محل دماسنج محاسبه میشود. بعد از مقایسه دماهای محاسبه شده با دماهای قرائت شده، شرط مرزی حدس

این فرض لحظه ای<sup>۷</sup> به دست آمده است که شار حرارتی در فاصله زمانی  $t_M$  تا  $t_{M+r-1}$  ثابت است. نشان داده شده است که این فرض که اولین بار به وسیله "بک" استفاده شد [۴]، خطای زیادی ایجاد نمی کند. بیشترین زمان مورد نیاز کامپیوتری در این روش مربوط به اولین مرحله محاسبات است. در این مرحله به ازای هر گام زمانی حل معکوس، حل مستقیم برای  $r$  گام زمانی انجام می گیرد. در بعضی موارد مقدار این عدد بالا انتخاب شده است که باعث افزایش زمان کامپیوتری می گردد. این در حالی است که نشان داده شده، این روش نسبت به روش های دیگر به زمان کامپیوتری کمتری نیاز دارد [۵].

در این مقاله با ترکیب روش اجزا مرزی و روش تخمین توابع متوالی، روشی ایجاد شده است که در آن مرحله اول محاسبات حذف می گردد. در این روش تخمین شرط مرزی مجهول مستقیماً و بدون هیچگونه تکراری بوسیله دو ماتریس تبدیل که یکی لحاظ کننده شرط اولیه و دیگری لحاظ کننده دماهای اندازه گیری شده است به دست می آید. این روش علاوه بر امتیازی که به آن اشاره شد، از امتیازات کلی روش اجزا مرزی نسبت به روش های مجزا سازی دیگر برای مسائل معکوس مانند اختلاف محدود و اجزا محدود همانطور که در مرجع [۶] اشاره شده و از امتیازات روش تقابل دوگانه اجزا مرزی نسبت به روش های دیگر اجزا مرزی [۷] سود می جوید.

## بررسی انواع روشهای اجزا مرزی برای حل معادلات هدایت حرارتی

همانطوریکه قبلاً اشاره گردید، روش اجزا مرزی دارای امتیازات قابل توجهی نسبت به روش های مجزا سازی دیگر مانند اجزا محدود و اختلاف محدود است [۶]. مهمترین این امتیازها، کاهش ابعاد مسئله به علت انتقال معادلات حاکم به مرز با استفاده از معادلات انتگرالی میباشد. حل مسائل پایدار هدایت حرارتی در این روش به آسانی و با استفاده از حل اساسی معادله لاپلاس صورت میگیرد [۸]. حل معادلات ناپایدار هدایت حرارتی با روش اجزا مرزی کمی مشکل تر می باشد که این مسئله در اثر جمله مشتق زمانی ایجاد گردیده است. در این ارتباط چندین روش مختلف ارائه گردیده که دو روش کاربرد

زده شده با استفاده از راستاهای مزدوج اصلاح می گردد. این کار تا رسیدن به جواب مطلوب ادامه میابد [۱]. یکی از کاراترین روش های معکوس هدایت حرارتی که در واقع این تکرار را مینیمم کرده است، روش تخمین توابع متوالی است. این روش بر این مبنا واقع شده که شرط مرزی که در زمان  $t_M$  اعمال می شود بر روی دماهای اندازه گیری شده در زمان  $t_M$  و  $r-1$  دمای بعدی اثر می گذارد که  $r \times \Delta t$  زمانی است که لازم است تا پاسخ شرط مرزی در دماسنج دریافت شود. در این روش که یک روش متوالی است فرض می شود مسئله تا زمان  $t_{M-1}$  حل گردیده است. به عبارت دیگر مقادیر یا مولفه های شار حرارتی مجهول و توزیع دما تا این زمان معلوم می باشند. مولفه های شار حرارتی در زمان  $t_M$  با استفاده از الگوریتم سه مرحله ای زیر به دست می آیند [۳].

۱- محاسبه مقدار دما در محل دماسنج ها در زمان های  $(t_{M+i-1}; i=1, \dots, r)$ :

این کار با استفاده از توزیع دما در زمان  $t_{M-1}$  به عنوان شرط اولیه و یک حدس برای شرط مرزی مجهول که معمولاً صفر در نظر گرفته می شود انجام می گیرد.

۲- محاسبه شرط مرزی مجهول با استفاده از رابطه زیر

$$\mathbf{q}^M = \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} (\bar{\mathbf{Y}} - \bar{\mathbf{T}}) \quad (1)$$

که در رابطه بالا

$$\mathbf{Z} = \frac{\partial T}{\partial q} \quad (2)$$

بوده که آن را ضریب حساسیت میگویند و  $\bar{\mathbf{Y}}$  دماهای قرائت شده میباشد (۲۸). مولفه های  $\bar{\mathbf{T}}$  که در رابطه (۲۹) تعریف شده از حل مستقیم (مرحله ۱) جایگزین میشود. رابطه (۱) از بسط تیلور  $T(q)$  حول نقطه صفر و مینیمم کردن مجموع مربعات خطا به دست آورده شده است.

۳- محاسبه توزیع دما در زمان  $t_M$ ، که به عنوان شرط اولیه برای گام زمانی بعد به کار برده می شود.

در این روش نیز همانطور که مشخص است نوعی سعی و خطا انجام می شود ولی کارائی آن به این علت است که جواب نهائی در تکرار دوم به دست می آید. رابطه (۱) با

میتوان به حالت های عمومی تر نیز توسعه داد [۱۱]. این کار به علت کاربرد بیشتر این نوع مسائل و سادگی فرمولاسیون انجام گرفته، میباشد. شرط مرزی سطح فعال نیز شار حرارتی مجهول به صورت تابعی از زمان و مکان در نظر گرفته شده است.

معادله دیفرانسیل حاکم و شرایط اولیه و مرزی با فرض ثابت بودن خواص ترموفیزیکی و عدم وجود جمله منبع به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \Omega \quad (3)$$

$$T(x, y, 0) = 1.0, \quad \Omega \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad \Gamma_1 \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = q(x, y, t), \quad \Gamma_2 \quad (6)$$

$$Y_i(t) = g_i(t), \quad (i = 1, \dots, N_1) \quad (7)$$

در یک مسئله مستقیم  $q(x, y, t)$  معلوم بوده ولی در مسائل معکوس مجهول میباشد. هدف تعیین شرط مرزی مجهول با استفاده از دماهای قرائت شده در دماسنج (۷) است.

## مجزا سازی معادلات هدایت حرارتی ناپایدار به روش DRBEM

روش تقابل دوگانه اجزا مرزی برای مجزا سازی معادله (۳) به کار گرفته شده است. در این روش مشتق زمانی دما به عنوان یک جمله منبع در نظر گرفته شده و از حل اساسی معادله لاپلاس که به صورت زیر است استفاده میگردد:

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln(r_j) \quad (8)$$

با ضرب دو طرف رابطه (۳) در حل اساسی معادله لاپلاس و انتگرال گیری بر روی سطح میتوان نوشت

بیشتری یافته اند. روش اول بر مبنای استفاده از حل اساسی به صورت تابعی از زمان  $^A$  (TDBEM) میباشد. در این روش در معادلات انتگرالی حاکم یک انتگرال روی سطح که بیانگر شرط اولیه میباشد باقی می ماند که باعث میشود مزیت اصلی روش یعنی عدم نیاز به شبکه بندی در داخل ناحیه حل از بین برود. برای حل این مشکل، روشی پیشنهاد شده که در آن انتگرال گیری بر روی زمان در هر گام زمانی از زمان صفر آغاز شده و با صفر کردن شرط اولیه یکنواخت، انتگرال روی سطح حذف میشود. با وجود اینکه در این روش نیاز به شبکه بندی معادلات در داخل ناحیه حل نیست، با افزایش تعداد گامهای زمانی، زمان و حافظه کامپیوتری مورد نیاز افزایش میابد زیرا تمام دماها و ضرایب مربوطه از زمان صفر باید ذخیره گردند [۹]. روش دیگر، که در این مقاله نیز به کار گرفته شده است، استفاده از حل اساسی معادله لاپلاس است. در این روش جمله مشتق زمانی به عنوان یک جمله منبع در نظر گرفته شده و با روش تقابل دوگانه اجزا مرزی به مرز منتقل میگردد. این روش مشکلات ذکر شده برای روش (TDBEM) را ندارد و بررسیها کارائی آن را نشان داده است [۱۰]. اولین بار سینگ و تاناکا [۷] از این روش همراه با روش گرادیان های مزدوج برای مسائل معکوس هدایت حرارتی استفاده کرده و کارائی آن را نسبت به روشهای دیگر المان مرزی گزارش کردند.

## تشریح مسئله

در حالت کلی مرز ناحیه حل در یک مسئله هدایت حرارتی معکوس را می توان به دو قسمت، مرز با شرط مرزی مجهول که معمولاً به آن سطح فعال می گویند و مرز با شرط مرزی معلوم که به آن سطح غیر فعال می گویند تقسیم کرد. سطح غیر فعال می تواند شامل یک یا هر سه نوع شرط مرزی باشد ولی در عمل بیشتر مواقع این سطح را عایق در نظر میگیرند. در واقع در عمل این سطح معمولاً به مفهوم دقیق آن عایق نیست بلکه از انتقال حرارت آن نسبت به سطح فعال در زمان های اولیه که معمولاً حل معکوس اعمال میشود، صرفنظر می کنند. فرمولاسیون ارائه شده در این مقاله برای حالتی در نظر گرفته شده که سطح غیر فعال عایق باشد ولی روش را

که از آن می توان برای حل مسائل مستقیم استفاده کرد.

### حل معکوس

رابطه (۱۴) که از مجزا سازی معادله حاکم به دست آمده است، می تواند به صورت زیر نوشته شود

$$[\mathbf{H}][\mathbf{T}^M] + [\mathbf{G}][\mathbf{q}^M] + [\mathbf{F}][\mathbf{T}^{M-1}] = 0 \quad (15)$$

که در رابطه بالا با توجه به اینکه سطح غیرفعال عایق می باشد،  $\mathbf{q}$  بیانگر شار حرارتی در روی سطح فعال و  $\mathbf{T}$  بیانگر دما در تمام نقاط است. در رابطه (۱۴) مجهولات شامل شار حرارتی در روی سطح فعال و دما در نقاطی است که در آنها دماسنج قرار نگرفته است. با قرار دادن مجهولات در یک بردار  $\mathbf{X}$  رابطه (۱۵) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \quad (16)$$

در رابطه بالا  $\mathbf{A}$  یک ماتریس  $N_2 \times N_3$  میباشد، که  $N_3$  تعداد مجهولات و  $N_2$  تعداد معادلات است. برای این که معادله فوق دارای جواب باشد باید  $N_2 \geq N_3$  انتخاب گردد که این به آن مفهوم است که تعداد دما های قرائت شده باید بیشتر از تعداد مولفه های شار حرارتی بر روی سطح فعال باشد. ولی در این حالت نیز به علت بدخیم بودن مسئله ناشی از اثرات میرائی و تاخیر جواب حاصل جواب مناسبی نمی باشد و باید نوعی تنظیم<sup>۹</sup> اعمال کرد.

به منظور حل معادله (۱۵) آن را می توان به صورت زیر نوشت:

$$[\mathbf{T}^M] = [\bar{\mathbf{G}}][\mathbf{q}^M] + [\bar{\mathbf{F}}][\mathbf{T}^{M-1}] \quad (17)$$

که در رابطه بالا

$$[\bar{\mathbf{G}}] = -[\mathbf{H}]^{-1}[\mathbf{G}] \quad \text{و} \quad (18)$$

$$[\bar{\mathbf{F}}] = -[\mathbf{H}]^{-1}[\mathbf{F}] \quad (19)$$

میباشد. رابطه (۱۷) را می توان برای حل مستقیم، زمانی که  $\mathbf{q}^M$  تخمین زده شده است به کار برد. با بازنویسی این

$$\int_{\Omega} G(\nabla^2 T) d\Omega = \int_{\Omega} G \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega \quad (9)$$

با استفاده از رابطه دوم گرین معادله (۸) به صورت زیر نوشته میشود:

$$\lambda T(r_j, t) - \int_{\Gamma} \left[ T \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial T}{\partial n} \right] d\Gamma = \int_{\Omega} G \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega \quad (10)$$

که  $\Gamma$  بیانگر مرز ناحیه حل  $\Omega$  و  $\lambda$  ضریب شکل می باشد. مشتق زمانی دما را می توان با استفاده از توابع میانمایی یا برازش بصورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N_2} f(\bar{r}_j) \beta_j(t) \quad (11)$$

که برای این برازش از نقاط مرزی و تعدادی از نقاط داخلی که به آنها نقاط تقابل دوگانه می گویند استفاده میشود.

با جایگزینی رابطه (۱۰) در رابطه (۹) و انجام عملیات ریاضی که شرح آن در مرجع [۱۰] آمده است می توان نوشت:

$$[\mathbf{R}][\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial n}] - [\mathbf{S}][\mathbf{T}] = [\mathbf{P}][\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}] \quad (12)$$

با استفاده از روش های مختلف میتوان مشتق زمانی دما را مجزا سازی نمود. شرح این روشها و مقایسه آنها در مراجع [۱۰، ۱۲] آمده است. در این مقاله از روش ضمنی به علت سادگی و دقت قابل قبول آن استفاده شده است. در این روش میتوان نوشت:

$$\left[ \frac{\partial T}{\partial t} \right]^{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} [T^{t+\Delta t} - T^t] \quad (13)$$

با ترکیب روابط (۱۲) و (۱۳) رابطه زیر به دست می آید:

$$[\mathbf{S}][\mathbf{T}]^{t+\Delta t} - [\mathbf{R}][\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial n}]^{t+\Delta t} + \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{P}][\mathbf{T}]^{t+\Delta t} - \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{P}][\mathbf{T}]^t = 0 \quad (14)$$

$$\bar{\mathbf{Y}} = (\mathbf{Y}^M, \mathbf{Y}^{M+1}, \dots, \mathbf{Y}^{M+r-1})^T \quad (28)$$

$$\bar{\mathbf{T}} = (\mathbf{T}_2^M, \mathbf{T}_2^{M+1}, \dots, \mathbf{T}_2^{M+r-1})^T \quad (29)$$

میباشد. بردار  $\bar{\mathbf{T}}$  در رابطه (۲۷) را با استفاده از رابطه (۲۶) به صورت زیر می توان نوشت:

$$\bar{\mathbf{T}} = [\mathbf{C}][\mathbf{q}^M] + [\mathbf{D}][\mathbf{T}^{M-1}] \quad (30)$$

که

$$[\mathbf{C}]^T = [\mathbf{C}_2^0, \mathbf{C}_2^1, \dots, \mathbf{C}_2^{r-1}] \quad (31)$$

و

$$[\mathbf{D}]^T = [\mathbf{D}_2^0, \mathbf{D}_2^1, \dots, \mathbf{D}_2^{r-1}] \quad (32)$$

می باشد. با جایگزینی رابطه (۳۰) در (۲۷) و مینیمم کردن مجموع مربعات خطا نسبت به  $\mathbf{q}^M$ ، داریم

$$[\mathbf{q}^M] = [\mathbf{G}_1][\bar{\mathbf{Y}}] + [\mathbf{G}_2][\mathbf{T}^{M-1}] \quad (33)$$

که

$$[\mathbf{G}_1] = [\mathbf{C}^T \mathbf{C}]^{-1} [\mathbf{C}]^T \quad (34)$$

و

$$[\mathbf{G}_2] = -[\mathbf{C}^T \mathbf{C}]^{-1} [\mathbf{D}] \quad (35)$$

می باشد. در این روش که ما آن را روش ماتریس های تبدیل<sup>۱۰</sup> (TMM) می نامیم، اولین گام محاسبه ماتریس های تبدیل است که در روابط (۱۷،۳۳) به کار برده می شوند. حل به مانند روش (SFSM) به صورت متوالی صورت می گیرد. به طور مشابه فرض می شود که مسئله تا زمان  $t_{M-1}$  حل گردیده است. به عبارت دیگر مقادیر شار حرارتی مجهول و توزیع دما تا این زمان معلوم می باشند. مولفه های شار حرارتی در زمان  $t_M$  با استفاده از الگوریتم دو مرحله ای زیر به دست می آیند:

۱- تخمین شار حرارتی با استفاده از رابطه (۳۳)

۲- محاسبه توزیع دما در زمان  $t_M$  با استفاده از رابطه (۱۷) که به عنوان شرط اولیه برای گام زمانی بعد به کار

رابطه برای گام زمان  $M+1$  داریم:

$$[\mathbf{T}^{M+1}] = [\bar{\mathbf{G}}][\mathbf{q}^{M+1}] + [\bar{\mathbf{F}}][\mathbf{T}^M] \quad (20)$$

با ترکیب روابط (۱۷) و (۲۰) و استفاده از فرض موقت شار حرارتی ثابت یعنی:

$$[\mathbf{q}^M] = [\mathbf{q}^{M+1}] = \dots = [\mathbf{q}^{M+r-1}] \quad (21)$$

که اولین بار به وسیله "بک" [۴،۱۳] استفاده شد، می توان نوشت:

$$[\mathbf{T}^{M+1}] = [\mathbf{C}^1][\mathbf{q}^M] + [\mathbf{D}^1][\mathbf{T}^{M-1}] \quad (22)$$

به طور مشابه نیز می توان نوشت :

$$[\mathbf{T}^{M+i}] = [\mathbf{C}^i][\mathbf{q}^M] + [\mathbf{D}^i][\mathbf{T}^{M-1}] \quad (23)$$

که

$$[\mathbf{C}^i] = [\bar{\mathbf{G}}] + [\bar{\mathbf{F}}][\mathbf{C}^{i-1}] \quad (24)$$

$$[\mathbf{D}^i] = [\bar{\mathbf{F}}][\mathbf{D}^{i-1}] \quad (25)$$

و

$$[\mathbf{D}^0] = [\bar{\mathbf{F}}], \quad [\mathbf{C}^0] = [\bar{\mathbf{G}}].$$

میباشد. در رابطه (۲۳) دما در نقاطی که در آنها دماسنج قرار گرفته است معلوم و در بقیه نقاط نامعلوم می باشد. بنابراین بردار دما  $\mathbf{T}$  را می توان به دو بردار  $\mathbf{T}_1$  و  $\mathbf{T}_2$  تقسیم کرد و رابطه را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^{M+i} \\ \mathbf{T}_2^{M+i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^i \\ \mathbf{C}_2^i \end{bmatrix} [\mathbf{q}^M] + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1^i \\ \mathbf{D}_2^i \end{bmatrix} [\mathbf{T}^{M-1}] \quad (26)$$

$i = 0, \dots, r-1,$

که  $\mathbf{T}_2$  بیانگر دما در نقاطی است که در آنها دماسنج قرار گرفته و  $\mathbf{T}_1$  دما در بقیه نقاط است.

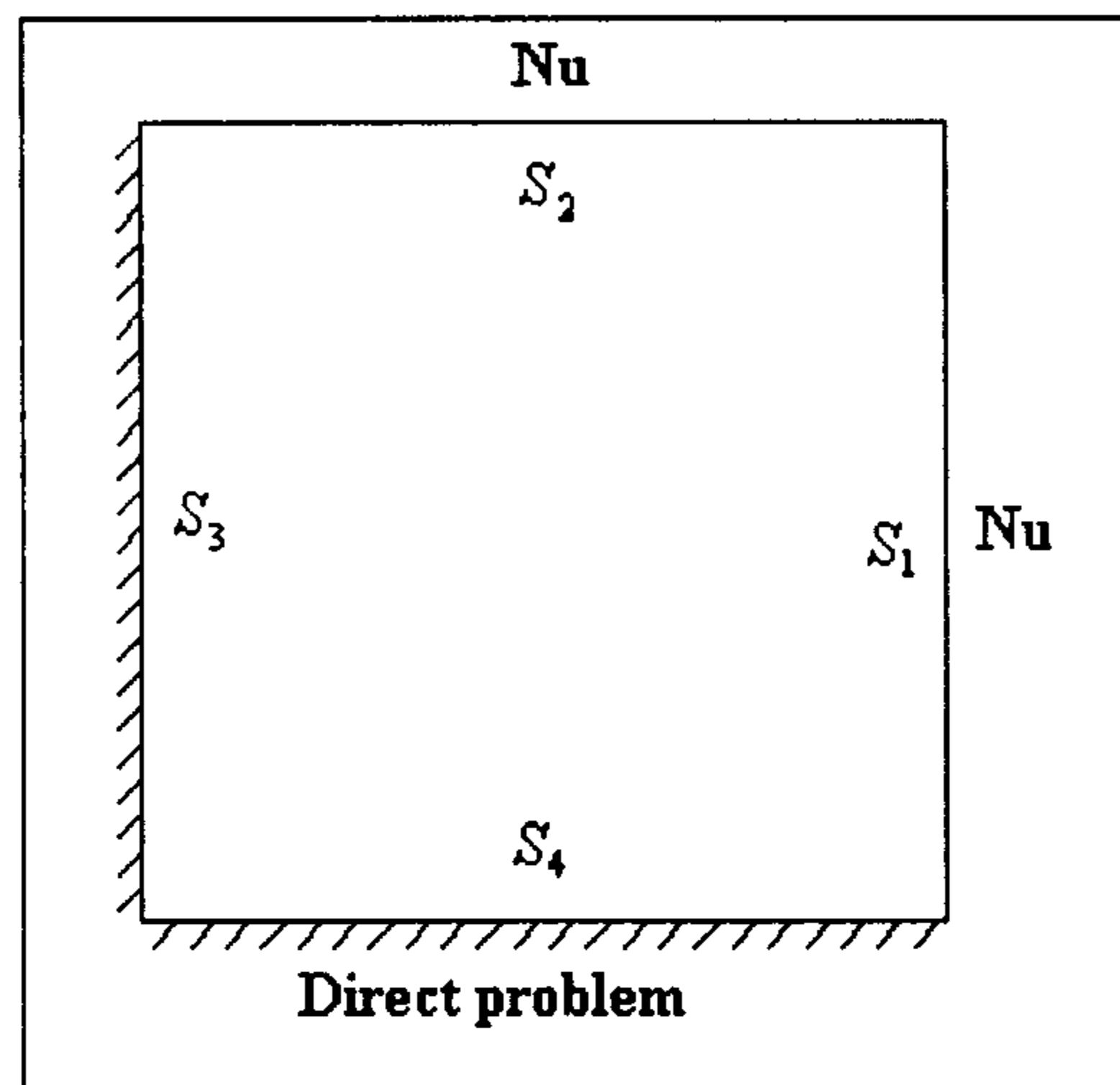
بردار شار حرارتی مجهول از کمینه کردن تابع هدف که به صورت زیر تعریف می شود به دست می آید.

$$\mathbf{S} = (\bar{\mathbf{Y}} - \bar{\mathbf{T}})^T (\bar{\mathbf{Y}} - \bar{\mathbf{T}}) \quad (27)$$

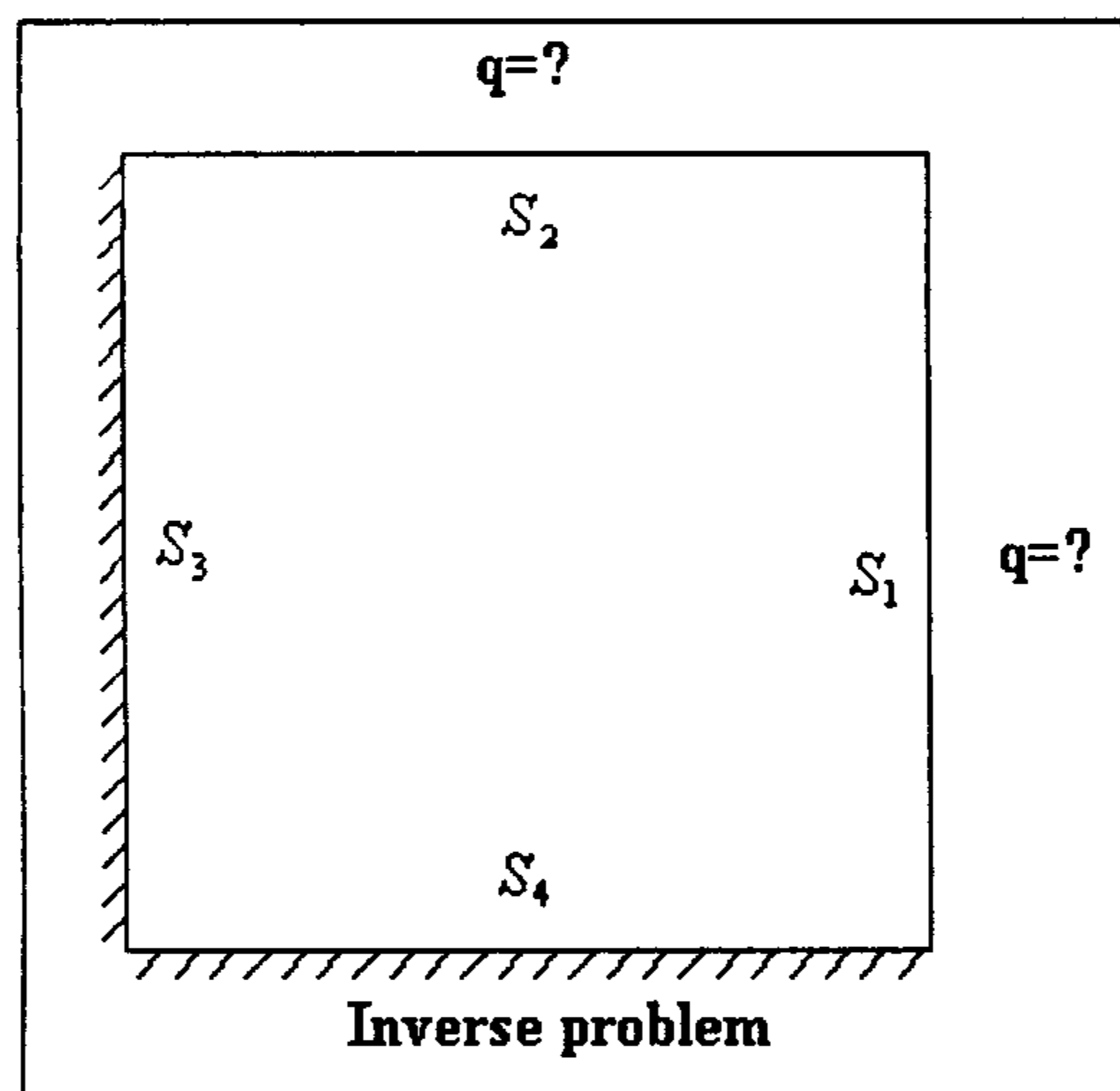
که

$$Y = T + d(1 - 2p)$$

(۳۸)



شکل ۱-الف: هندسه و شرایط مرزی مسئله مستقیم.



شکل ۱-ب: هندسه و شرایط مرزی مسئله معکوس.

در حل معکوس که با استفاده از دماهای به دست آمده از مدل سازی انجام گردیده است، سطوح  $S_3$  و  $S_4$  عایق و شرط مرزی سطوح  $S_1$  و  $S_2$  که سطوح فعال می باشند، شار حرارتی مجهول، به صورت تابعی از زمان و مکان می باشد. نتایج تخمین شار حرارتی با نتایج حل تحلیلی که از رابطه (۳۵) به دست آمده مقایسه گردیده است.

### نتایج و بحث

به منظور مقایسه سرعت و دقت روش با روش (SFSM) مسئله با هر دو روش حل گردیده است. در شکل (۲) شبکه بندی مورد استفاده و قرار گیری

برده می شود.

مشاهده می شود که الگوریتم حل در این روش شامل چهار ضرب ماتریسی است. در عمل می توان از دو برنامه کامپیوتری جدا که یکی تولید کننده ماتریسها باشد و دیگری حل معکوس را انجام دهد استفاده نمود. این مسئله امتیازات زیادی را برای کاربران ایجاد می کند. مثلا در مسائل عملی این ماتریسها را برای یک مسئله خاص میتوان یک بار محاسبه نموده و به دفعات به کار برد و یا در کاربردهای کنترلی نیازی به قرار دادن برنامه کامپیوتری تولید کننده ماتریس در نرم افزار کنترلی نمی باشد. امتیاز دیگر روش افزایش سرعت و دقت است که در قسمت نتایج بررسی شده است.

### شبیه سازی تحلیلی

برای بررسی سرعت و دقت روش، از یک مسئله شبیه سازی شده استفاده شده است. در شکل (۱) هندسه و شرایط مرزی مسئله ای که از حل مستقیم آن برای شبیه سازی استفاده گردیده است و مسئله معکوس مرتبط نشان داده شده است.

این مسئله قبلا به وسیله تعدادی از محققین برای بررسی کارایی روش های معکوس استفاده گردیده است [۷، ۱۴] همانطوریکه در شکل نشان داده شده است در مسئله مستقیم سطوح  $S_3$  و  $S_4$  عایق بوده و شرط مرزی سطوح  $S_1$  و  $S_2$  نوع سوم با ضریب جابجائی ثابت می باشد. حل تحلیلی این مسئله که با جدا سازی ضربی به دست آمده به صورت زیر است [۷]

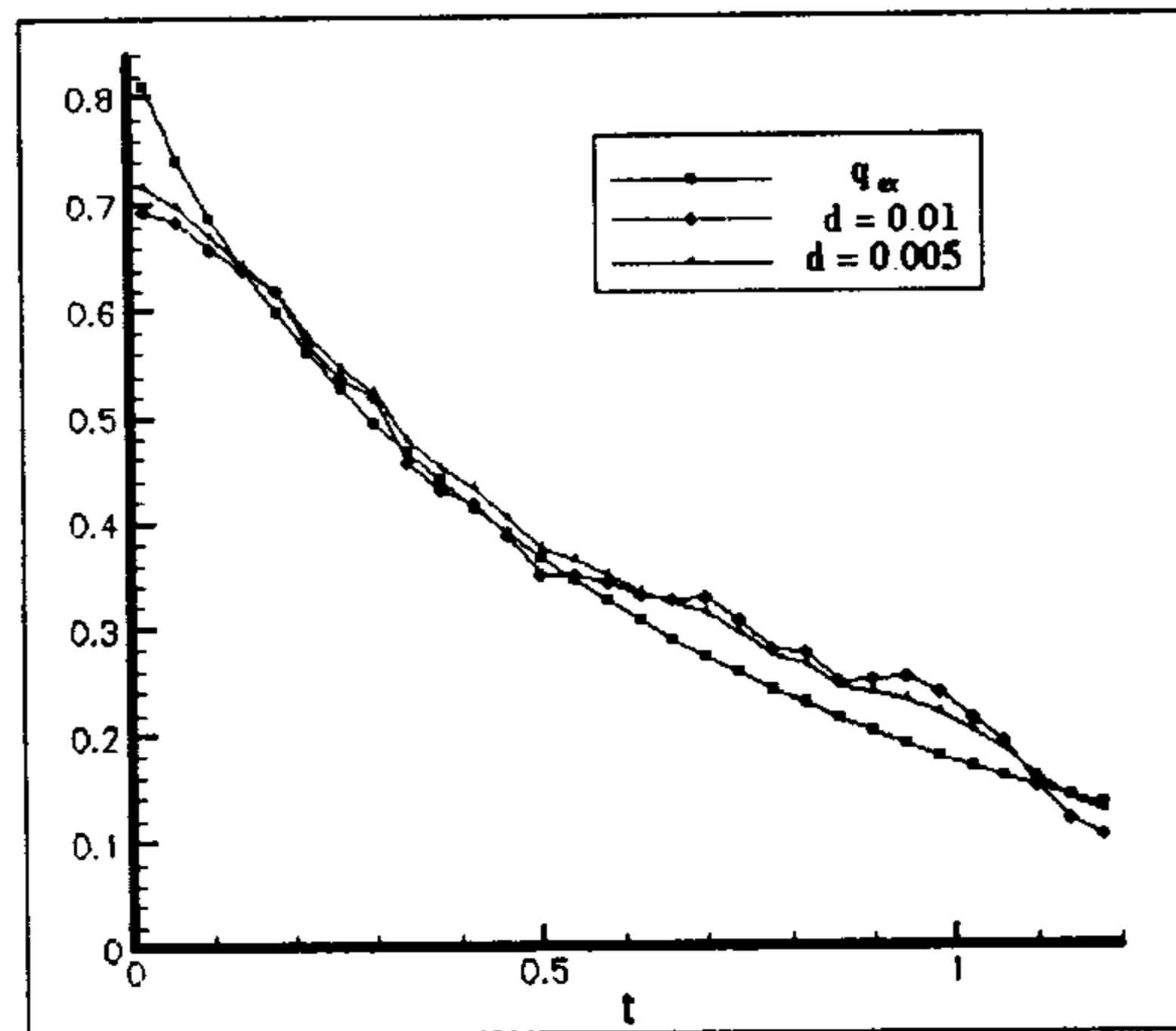
$$T(x, y, t) = w(x, t)w(y, t) \quad (36)$$

که

$$w(z, t) = 2Nu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\beta_n z) \sec(\beta_n)}{Nu(Nu + 1) + \beta_n^2} \exp(-\beta_n^2 t) \quad (37)$$

و  $\beta_n$  ریشه های معادله  $\beta \tan(\beta) - Nu = 0$  می باشند.

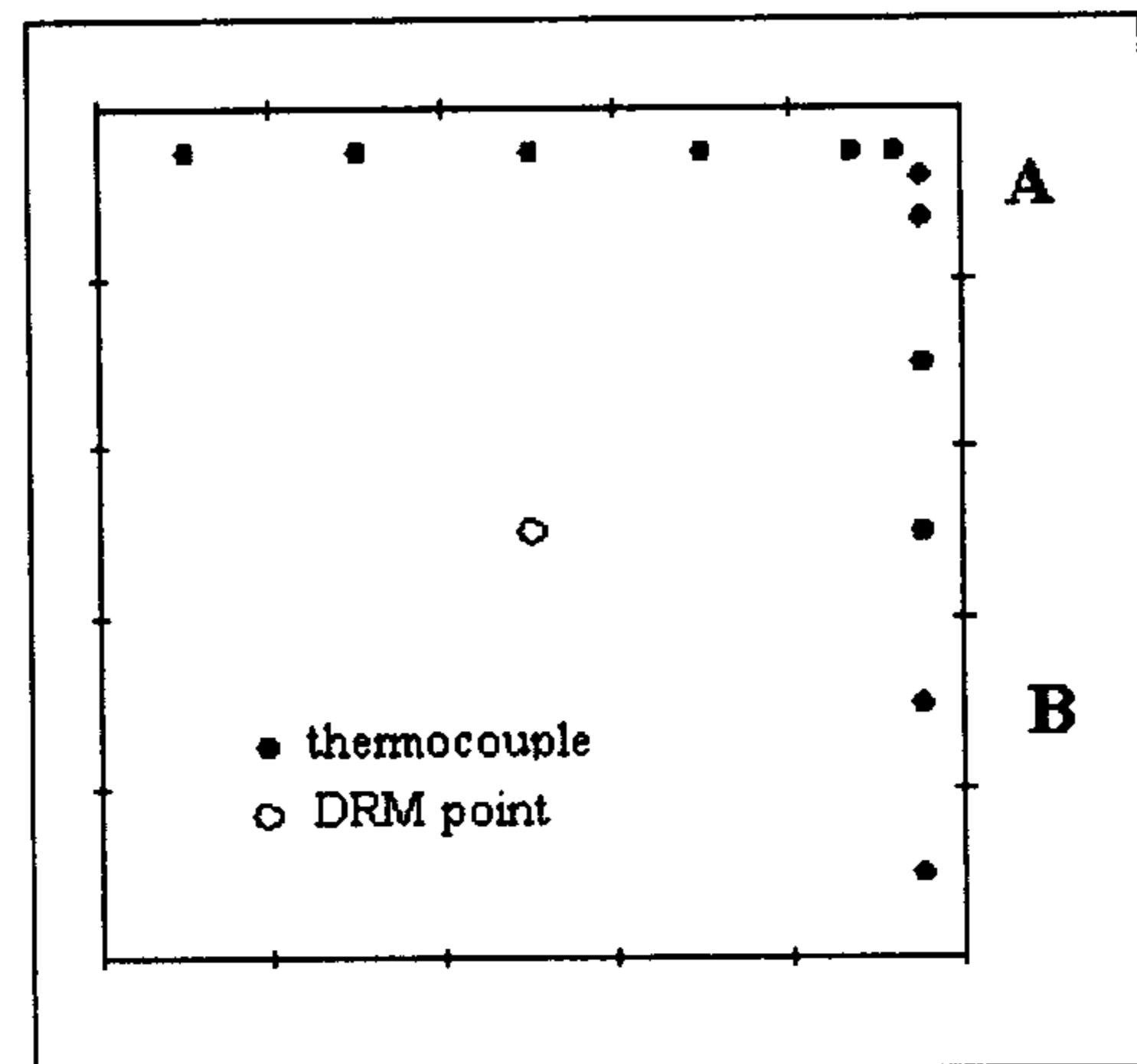
به منظور مدل سازی خطاهای اندازه گیری دماهای محاسبه شده بوسیله رابطه (۳۷) با استفاده از یک تابع اتفاقی و به صورت زیر مغشوش گردیده است [۲].



شکل ۳: مقایسه حل معکوس با جوابهای دقیق بر حسب زمان در المان B،  $r=5$ ,  $Nu=1$ ,  $\Delta t=0.04$ .

نتایج با استفاده از کامپیوتر (Celeron 700) بدست آمده اند. همانطور که مشاهده میشود نتایج حاکی از بهبود قابل توجه در زمان کامپیوتری روش (TMM) نسبت به روش (SFSM) میباشد. در روش (SFSM) با افزایش تعداد گام های زمانی آینده ( $r$ ) زمان کامپیوتری افزایش قابل توجه می یابد ولی در روش (TMM) این افزایش محسوس نیست. در واقع در روش (TMM) نیز زمان کامپیوتری کمی افزایش میابد ولی با توجه به اینکه این زمان با استفاده از تابع (Gettime) در (Fortran Powerstation) اندازه گیری شده است و دقت این تابع تا دو رقم اعشار است این افزایش مشاهده نمیشود. بنابراین با افزایش تعداد گام های زمانی تفاوت زمانهای کامپیوتری دو روش بیشتر شده به نحوی که برای ( $r=20$ ) زمان مورد نیاز در روش (SFSM) بیش از ۵۰ برابر روش (TMM) میباشد. دلیل این بهبود قابل توجه در زمان کامپیوتری کاملاً واضح است زیرا به ازای ( $r=20$ ) در روش (SFSM) به ازای هر گام زمانی حل معکوس، حل مستقیم برای ۲۰ گام زمانی انجام میشود ولی در روش (TMM) این حل مستقیم مورد نیاز نیست و تخمین مستقیماً انجام میشود. قابل ذکر است که در مقایسه انجام شده از روش (DRBEM) در هر دو حل استفاده شده است و بهبود حاصل شامل امتیازات روش (DRBEM) نسبت به روش های دیگر مانند اختلاف محدود و المان محدود نمیشود. در مورد هر یک از این روشها میتوان از مقایسه جداگانه ای استفاده کرد. در

دماسنج ها نشان داده شده است.



شکل ۴: شبکه بندی ناحیه حل و محل دماسنج ها.

در مرجع [۱۴] که این مسئله با روش تخمین توابع متوالی و روش اجزا مرزی، بر اساس حل اساسی تابع زمان حل شده است به وجود ناپایداری جوابها در المان (A) اشاره شده است. در این مرجع برای پایدار کردن حل از ترکیب کردن روش تخمین توابع متوالی و روش تنظیم زمانی<sup>۱۱</sup> استفاده شده است. در این مقاله برای پایدار کردن حل همانطوریکه در شکل مشاهده میشود از قرار دادن تعداد بیشتر دماسنج در نزدیکی این نقطه استفاده گردیده است. ناپایداری حل های معکوس در گوشه هایی که از دو سطح فعال ایجاد شده اند، در مرجع [۱۵] بررسی شده است.

در شکل (۳) حل معکوس به ازای دو دامنه خطا ( $d = 0.005, 0.01$ ) با جواب دقیق (۳۵) مقایسه گردیده است. همانطوریکه مشاهده میشود، نتایج دارای دقت قابل قبولی میباشد که این دقت با افزایش دامنه خطاها کمی کاهش مییابد. به ازای مقادیر بالاتر دامنه خطا همانطور که در مراجع [۲، ۱۳] اشاره شده میتوان با اضافه کردن یک جمله تنظیم به مجموع مربعات خطا از ترکیب روش تخمین توابع متوالی و تنظیم تیخونو استفاده نمود. در شکل (۴) نیز توزیع مکانی شار حرارتی تخمین زده شده با مقدار دقیق آن مقایسه شده است. زمان های کامپیوتری حل با روش ماتریس های تبدیل و روش تخمین توابع متوالی در جدول (۱) مقایسه گردیده اند.

جدول ۲: مقایسه دقت روش های (SFSM) و (TMM)  
( $\Delta t=0.04, r=5, d=0.01, Nu=1$ )

Time	0.42	0.54	0.66	0.82
$q_{ex}$	0.42	0.35	0.29	0.23
TMM	0.44	0.34	0.32	0.27
SFSM	0.45	0.38	0.33	0.28

### نتیجه گیری

در مقاله حاضر یک روش جدید برای حل مسائل معکوس هدایت حرارتی با خواص ترموفیزیکی ثابت شد. این روش بر مبنای فرضیات و مفاهیم مورد استفاده در روش (SFSM) ایجاد گردیده ولی دارای امتیازات کاهش قابل ملاحظه زمان کامپیوتری و افزایش دقت محاسبات میباشد. در این روش برخلاف روش (SFSM) زمان کامپیوتری مورد نیاز با افزایش تعداد گام های زمانی آینده افزایش محسوس نمییابد. نتایج تا دامنه خطا ( $d = 0.01$ ) رضایت بخش بوده و برای مقادیر بالاتر نیاز به ترکیب روش با روش های دیگر به منظور پایدار کردن روش میباشد.

### فهرست علائم

$d$ : دامنه خطا

$Nu$ : عدد نوسلت

$N_1$ : تعداد دماسنج

$N_2$ : مجموع تعداد نقاط مرزی و تقابل دوگانه

$N_3$ : تعداد مجهولات

$n$ : جهت عمودی

$p$ : عدد اتفاقی در فاصله  $[0, 1]$

$q$ : شار حرارتی

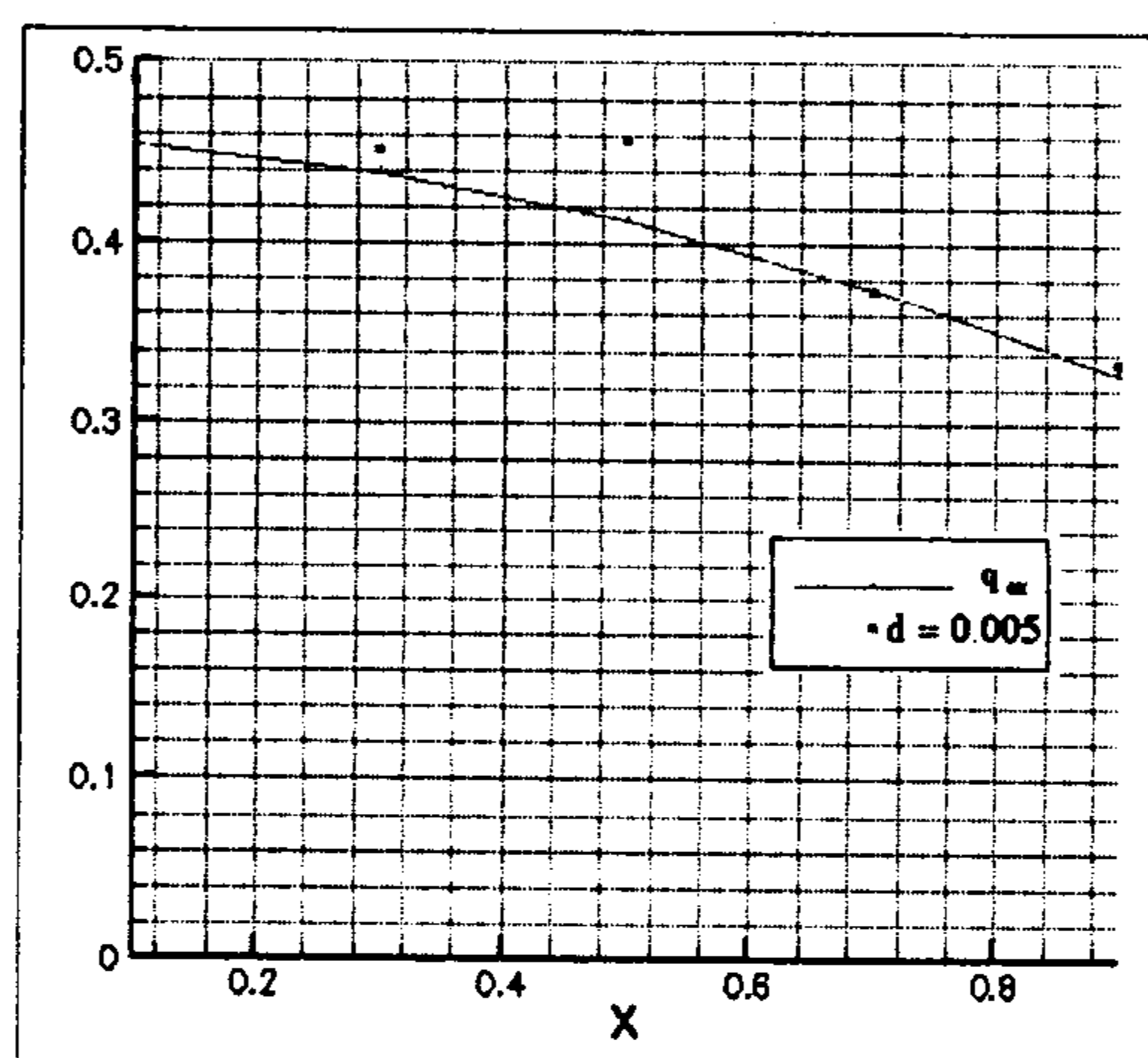
$q_{ex}$ : مقدار دقیق شار حرارتی

$r_j$ : فاصله تا نقطه منبع

$r$ : تعداد گام های زمانی آینده

$T$ : دمای بی بعد

جدول (۲) دقت های دو روش مقایسه گردیده است. نتایج حاکی از افزایش دقت در روش (TMM) نسبت به روش (SFSM) می باشد. توضیح این مسئله نیز آسان میباشد. خطاهای موجود در روشهای معکوس را میتوان به چهار بخش خطاهای تعیین<sup>۱۲</sup>، که در اثر تنظیم به کار رفته و فرضیات اعمالی مانند معادله (۲۰) ایجاد میشود، خطای مغایرت<sup>۱۳</sup> که در واقع در اثر تفاوت مقادیر اندازه گیری شده و دقیق ایجاد میگردد، خطاهای ناشی از مجزا سازی معادلات حاکم و خطاهای کامپیوتری تقسیم کرد.



شکل ۴: مقایسه حل معکوس با جواب دقیق بر حسب مکان  
( $\Delta t=0.04, r=5, d=0.005, t=0.6, Nu=1$ )

جدول ۱: مقایسه زمان کامپیوتری روش (TMM) و (SFSM) برای ۱۰۰ گام زمانی.

$r$	5	10	15	20
TMM(s)	0.02	0.02	0.02	0.02
SFSM(s)	0.22	0.55	0.93	1.04

خطاهای مغایرت و تعیین در دو روش یکسان است زیرا این خطاها به نوع تنظیم بستگی دارد که در دو روش یکی میباشد. بهبود حاصل ناشی از کاهش محاسبات در روش (TMM) نسبت به روش (SFSM) و کاهش خطاهای مجزا سازی و کامپیوتری مربوطه میباشد



## علائم یونانی

$\lambda$ : ضریب شکل  
 $\Omega$ : ناحیه حل  
 $\Gamma$ : مرز  $\Omega$

$t$ : زمان بی بعد  
 $x$ : مختصه مکانی بی بعد  
 $Y$ : دماهای اندازه گیری شده  
 $y$ : مختصه مکانی بی بعد  
 $Z$ : ضریب حساسیت

## اندیس ها

$M$ : اندیس زمانی  
 $i$ : شمارنده دماسنج ها یا گام زمانی

## مراجع

- 1 - Alifanov, O. M. (1994). *Inverse heat transfer problems*. Springer-Verlag-Berlin- Heidelberg.
- 2 - Kurpysz, K. and Nowak, A. J.(1995). *Inverse thermal problems*. Computational Mechanics Publications. Southampton, USA.
- 3 - Beck, J. V., Likouhi, B. and Clair, St. (1985). *Inverse heat conduction: Ill-Posed problems*. Wiley Intersc., New York.
- 4 - Beck, J. V. (1968). "Surface heat flux determination using an integral method." *Nucl. Engng Des.*, Vol. 7, PP. 170-178.
- 5 - Beck, J. V., Blackwell, B. and Haji-Sheikh, (1996). "A comparison of some inverse heat conduction methods using experimental data." *International Journal of Heat Mass Transfer*, Vol. 39, No. 17, PP. 3649-3657.
- 6 - Lesnic, D., Elliott, L. and Ingham, D. B. (1996). "Application of the boundary element method to inverse conduction problems." *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 39, No. 7, PP. 1503-1517.
- 7 - Singh, K. M. and Tanaka, M. (2001). "Dual reciprocity boundary element analysis of inverse heat conduction problems." *Computer. Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, PP. 5283-5295.
- 8 - Ramachandran, P. A. (1994). *Boundary element methods in transport phenomena*. Computational Mechanics Publications.
- 9 - Pasquetti, R., Caruso, A. and Wrobel, L. C. (1992). "Transient problems using time-dependent fundamental solution." *Chapter-2, Boundary Element Methods in Heat Transfer*, Editors: L.C. Wrobel and C .A. Brebbia, Computational Mechanics Publications, Boston.
- 10 - Brebbia, C. A. and Nowak, A. J. (1992). "Solving heat transfer problems by the Dual Reciprocity BEM." *Chapter-1, Boundary Element Methods in Heat Transfer*, Editors: L.C. Wrobel and C .A. Brebbia, Computational Mechanics Publications, Boston .
- 11 - Kowsary, F. and Behbahaninia, A. "A hyper speed inverse convolution scheme for IHCP using dual reciprocity boundary element method." *Submitted to ASME journal of heat transfer*.
- 12 - Singh, K. M. and Kalra, S. (1996). "Time integration in the dual reciprocity boundary analysis of transient diffusion." *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 18, PP. 73-102 .
- 13 - Osman, A. M., Dowding, K. J. and Beck, J. V. (1997). "Numerical solution of the general two-dimensional inverse heat conduction problem(IHCP)." *ASME, J. of Heat Transfer*, Vol. 119, PP. 38-45.

- 14 - Kurpitz, K. and Nowak, A. J. (1992). "BEM approach to inverse heat conduction problems." *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 10, PP. 291-297.
- 15- Pasquetti, R. and Petit, D. (1994). "Inverse heat conduction problems with boundary elements: analysis of a corner effect." *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 13, PP. 321-331.

### واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- |  |  |
|--|--|
| 1 - Sequential Function Specification Method | 2 - Dual Reciprocity Boundary Element Method |
| 3 - Ill-Posed                                | 4 - Damping                                  |
| 5 - Lagging                                  | 6 - Conjugate Gradient                       |
| 7 - Temporary Assumption                     | 8 - Time Dependent Boundary Element Method   |
| 9 - Regularization                           | 10 - Transformation Matrix Method            |
| 11 - Temporal Regularization                 | 12 - Deterministic                           |
| 13 - Variance                                |  |