

# آنالیز غیرخطی دو صفحه دایروی و حلقوی با اتصال فنر حلزونی خطی

محمد حسن نائی

استادیار گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

مرتضی محمدی

فارغ التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۰/۹/۱۸، تاریخ تصویب ۸۲/۸/۲۴)

## چکیده

در این مقاله آنالیز غیرخطی دو صفحه دایروی و حلقوی که توسط فنرهای پیچشی خطی به یکدیگر متصل شده‌اند و تحت بار یکنواخت نسبتاً بزرگ واقع شده‌اند مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به دخالت نیروهای غشائی، معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله، به دو معادله دیفرانسیل غیرخطی کوپله می‌انجامد که به معادلات فون-کارمن<sup>۱</sup> معروف هستند. با بکارگیری پارامترهای مناسب، این جفت معادله به دوازده معادله دیفرانسیل غیرخطی مرتبه اول تبدیل می‌شوند. این معادلات با استفاده از روش پرتاب موازی<sup>۲</sup> و تصحیح نیوتن-رافسون و تعیین ژاکوبین مربوطه با روشی نو حل شده‌اند. تغییر شکل‌ها و تنشهای غشائی و خمشی و ماکزیمم آنها روی صفحات بررسی شده و نهایتاً تغییرات ماکزیمم تنش خمشی و غشائی برحسب تغییرات ضخامت صفحات، تغییرات نسبت شعاعهای صفحات، تغییرات بار وارده و تغییرات ضریب سختی فنر حلزونی آورده شده است. در انتها، با توجه به بکر بودن مسئله، به منظور اعتبار تحلیل انجام شده، حل این مسئله در حالت مخصوص با نتایج مسئله موجود در مرجع [۱۲] مقایسه شده است.

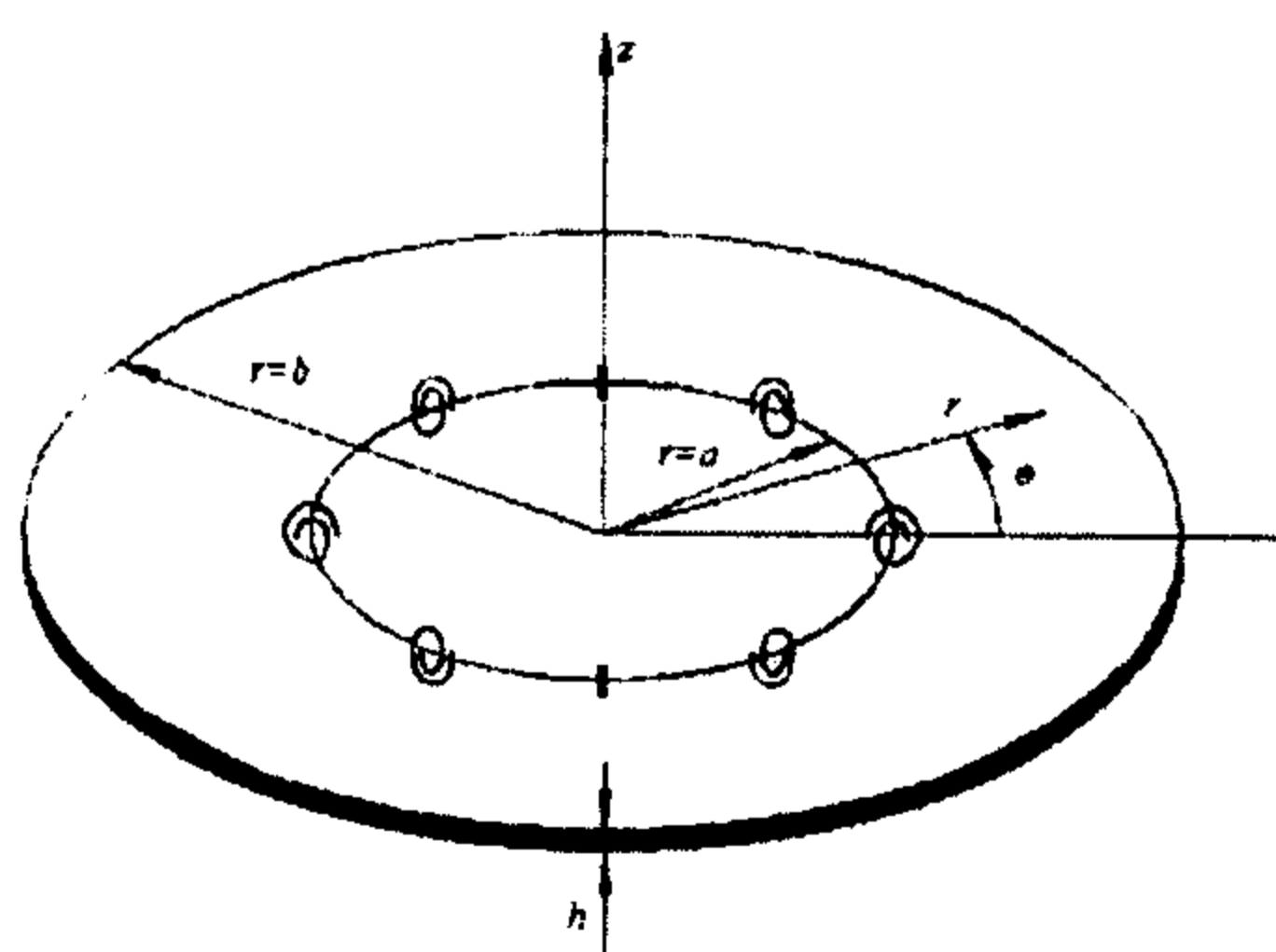
## واژه های کلیدی : صفحات حلقوی، فنر حلزونی، آنالیز غیرخطی، پرتاب موازی

## مقدمه

اند، بررسی شده است. در صنعت ممکن است سازه‌هایی مشابه این سیستم وجود داشته باشد که مثلاً لازم باشد دو قطعه با مقاومتهای تنشی متفاوت توسط لاستیک (یا اتصالی که بتوان با فنرهای حلزونی مدل کرد) به یکدیگر جوش داده شوند. در این شرایط بررسی ممان ماکزیمم تنش و تغییرات مقدار ماکزیمم تنش بر حسب تغییرات پارامترهای مختلف برای پیش‌بینی مکان شکست و کنترل ماکزیمم تنش که موجب شکست می‌شود، بسیار حایز اهمیت است. این چنین سازه‌هایی قابل مدلسازی توسط این مسئله هستند.

هر گاه تغییر مکان عرضی صفحه نازک بیشتر از ضخامت صفحه، در محدوده تغییر مکانهای نسبتاً بزرگ<sup>۳</sup> شود، بحث ریاضی مربوط به معادلات تعادل سیستم، علاوه بر تئوری کلاسیک خطی تغییر شکل صفحات، شامل تغییر شکل صفحه میانتر نیز می‌شود. این تغییر شکل علاوه بر وجود اثرات خمشی، با فرض وجود اثرات غشائی بر روی مقاومت صفحه قابل توجیه است. بدین ترتیب پدیده غیر خطی بودن هندسی در معادلات حاکم بر صفحه ظاهر می‌شود. در نتیجه معادلات تعادل صفحه (استاتیکی یا دینامیکی) تبدیل به دو معادله کوپله غیرخطی می‌شود که تنها به روشهای عددی قابل تحلیل است. در این زمینه مسائل متنوعی مورد بررسی قرار گرفته است. [۱-۱۰].

در این مقاله سازه‌ای متشکل از دو صفحه حلقوی و دایروی که توسط فنرهای حلزونی خطی مطابق شکل (۱) به یکدیگر متصل شده‌اند و تحت بار یکنواخت نسبتاً بزرگ و در نتیجه تحت تغییر مکانهای نسبتاً بزرگ قرار گرفته



شکل ۱: اتصال صفحه دایروی و حلقوی با اتصال فنر حلزونی.

## تئوری تغییر مکانهای عرضی نسبتاً بزرگ صفحات نازک<sup>۴</sup>

فرمول‌بندی معادلات حاکم: [۱۱]

یک ورق مسطح حلقوی نازک به شعاعهای داخلی و خارجی  $a, b$  را در نظر بگیرید که مرکز مختصات استوانه‌ای بر صفحه میان‌تار منطبق است ( $r$  در راستای شعاع و  $\theta$  در راستای محیط و  $z$  در راستای عمود بر سطح). با توجه به فرضیات کرفش، معادلات فون - کارمن برای صفحه دایره شکل ایزوتروپیک، تحت بارگذاری یکنواخت متقارن محوری به صورت زیر نوشته می‌شود:

معادلات حاکم در مختصات قطبی:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} - \frac{\psi}{r^2} = -\frac{Eh}{2r} \left(\frac{dw}{dr}\right)^2 \\ D \nabla^4 w - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \psi \frac{dw}{dr} \right) = P \end{cases} \quad (1)$$

$$\nabla^4 = \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right) \right]^2, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$N_r = \frac{\psi}{r}, \quad N_\theta = \frac{d\psi}{dr} \quad \text{تابع تنش:} \quad (2)$$

$$\sigma_r = \frac{N_r}{h} + \frac{12M_r}{h^3} z, \quad \sigma_\theta = \frac{N_\theta}{h} + \frac{12M_\theta}{h^3} z \quad (3)$$

بی بعد سازی معادلات حاکم

برای بی بعد کردن معادلات حاکم پارامترهای

زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} X &= w/h, \quad \xi = r/b, \quad U = u/h \\ \bar{P} &= \frac{12(1-\nu^2)}{E} \left(\frac{b}{h}\right)^4 P \\ \varphi &= \frac{1-\nu^2}{Eh^3} \psi \end{aligned} \quad (4)$$

و معادلات حاکم به این صورت بی بعد می‌شوند:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\varphi}{d\xi} - \frac{\varphi}{\xi^2} = -\frac{1-\nu^2}{2\xi} \left(\frac{dX}{d\xi}\right)^2 \\ \nabla^4 X - \frac{12}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left( \varphi \frac{dX}{d\xi} \right) = \bar{P} \end{cases} \quad (5)$$

## شرایط مرزی

برای تکمیل فرمولاسیون مسئله، باید مجموعه‌ای از شرایط مرزی بیان شود. معادلاتی که برای تبدیل شرایط مرزی بر حسب  $X, \varphi$  استفاده می‌شوند، عبارتند از:

$$\begin{aligned} M_r &= -\frac{Dh}{b^2} \left( \frac{d^2 X}{d\xi^2} + \frac{\nu}{\xi} \frac{dX}{d\xi} \right) \\ V_r &= -\frac{Dh}{b^3} \frac{d}{d\xi} (\nabla^2 X) \\ N_r &= \frac{Eh^3}{(1-\nu^2)b^2} \varphi \\ u &= \frac{h^2 \xi}{b(1-\nu^2)} \left( \frac{d\varphi}{d\xi} - \nu \frac{\varphi}{\xi} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

در سازه مورد بررسی، دو صفحه دایروی و حلقوی که شعاع داخلی صفحه حلقوی، برابر شعاع صفحه دایروی است، در مرز مشترک، توسط فنرهای الاستیک حلزونی گسترده  $\left(K \left(\frac{N-m}{m}\right)\right)$  به یکدیگر متصل شده‌اند. شرایط مرزی در شعاع خارجی گیردار است، بنابراین:

$$\xi = 1 : w = 0, \frac{dw}{dr} = 0, u = 0 \quad (7-a)$$

شرایط مرزی در مرکز [۱۱]:

$$\xi = 0 : \psi = 0, \frac{d\psi}{dr} = 0, \frac{d^3 w}{dr^3} = 0 \quad (7-b)$$

شرایط پیوستگی:

$$\begin{aligned} w_1(a) &= w_2(a) \\ u_1(a) &= u_2(a) \\ M_{r1} &= M_{r2} \end{aligned} \quad (7-c)$$

رابط ممانهای خمشی با فنر پیچشی:

$$M_{r1} = K(\theta_1 - \theta_2) \quad (7-d)$$

دو شرط مرزی دیگر، از معادلات مربوط به تعادل نیروها در مرز مشترک حاصل می‌شود. همانطور که در بدست آوردن معادلات حاکم، برای نوشتن تعادل نیروها در راستای شعاعی از المانی در وضعیت تغییر شکل نیافته

سپس توسط روش رانگ - کوتا همچون مسائل مقادیر اولیه، معادلات مربوط به این دو صفحه تا مرز مشترک حل می‌شود. آنگاه بردار خطا در مرز مشترک محاسبه شده و به روش نیوتن-رافسون مقادیر پیش فرض تصحیح می‌شوند.

**بیان معادلات به صورت دستگاه معادلات مرتبه اول**  
دستگاههای معادلات حاکم بر این دو صفحه می‌تواند به صورت دستگاههای معادلات مرتبه اول نوشته شود. به همین منظور متغیرهای زیر را تعریف می‌کنیم: صفحه دایروی:

$$\bar{\zeta}(\xi) = \left\{ X_1, \frac{dX_1}{d\xi}, \frac{d^2 X_1}{d\xi^2}, \frac{d^3 X_1}{d\xi^3}, \varphi_1, \frac{d\varphi_1}{d\xi} \right\}^T$$

$$= \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6\}^T \quad (8-a)$$

توجه به معادلات بی‌بعد حاکم، معادلات حاکم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d\bar{\zeta}}{d\xi} = \left\{ \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \bar{P} + 12 \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} (\zeta_5 \zeta_2) - \left( \frac{2}{\xi} \zeta_4 - \frac{1}{\xi^2} \zeta_3 + \frac{1}{\xi^3} \zeta_2 \right), \zeta_6, -\frac{1}{\xi} \zeta_6 + \frac{1}{\xi^2} \zeta_5 - \frac{1-\nu_1^2}{2\xi} (\zeta_2)^2 \right\}^T$$

$$(8-b)$$

صفحه حلقوی

$$\bar{\eta}(\xi) = \left\{ X_2, \frac{dX_2}{d\xi}, \frac{d^2 X_2}{d\xi^2}, \frac{d^3 X_2}{d\xi^3}, \varphi_2, \frac{d\varphi_2}{d\xi} \right\}^T$$

$$= \{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6\}^T \quad (8-c)$$

$$\frac{d\bar{\eta}}{d\xi} = \left\{ \eta_2, \eta_3, \eta_4, \bar{P} + 12 \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} (\eta_5 \eta_2) - \left( \frac{2}{\xi} \eta_4 - \frac{1}{\xi^2} \eta_3 + \frac{1}{\xi^3} \eta_2 \right), \eta_6, -\frac{1}{\xi} \eta_6 + \frac{1}{\xi^2} \eta_5 - \frac{1-\nu_2^2}{2\xi} (\eta_2)^2 \right\}^T$$

$$(8-d)$$

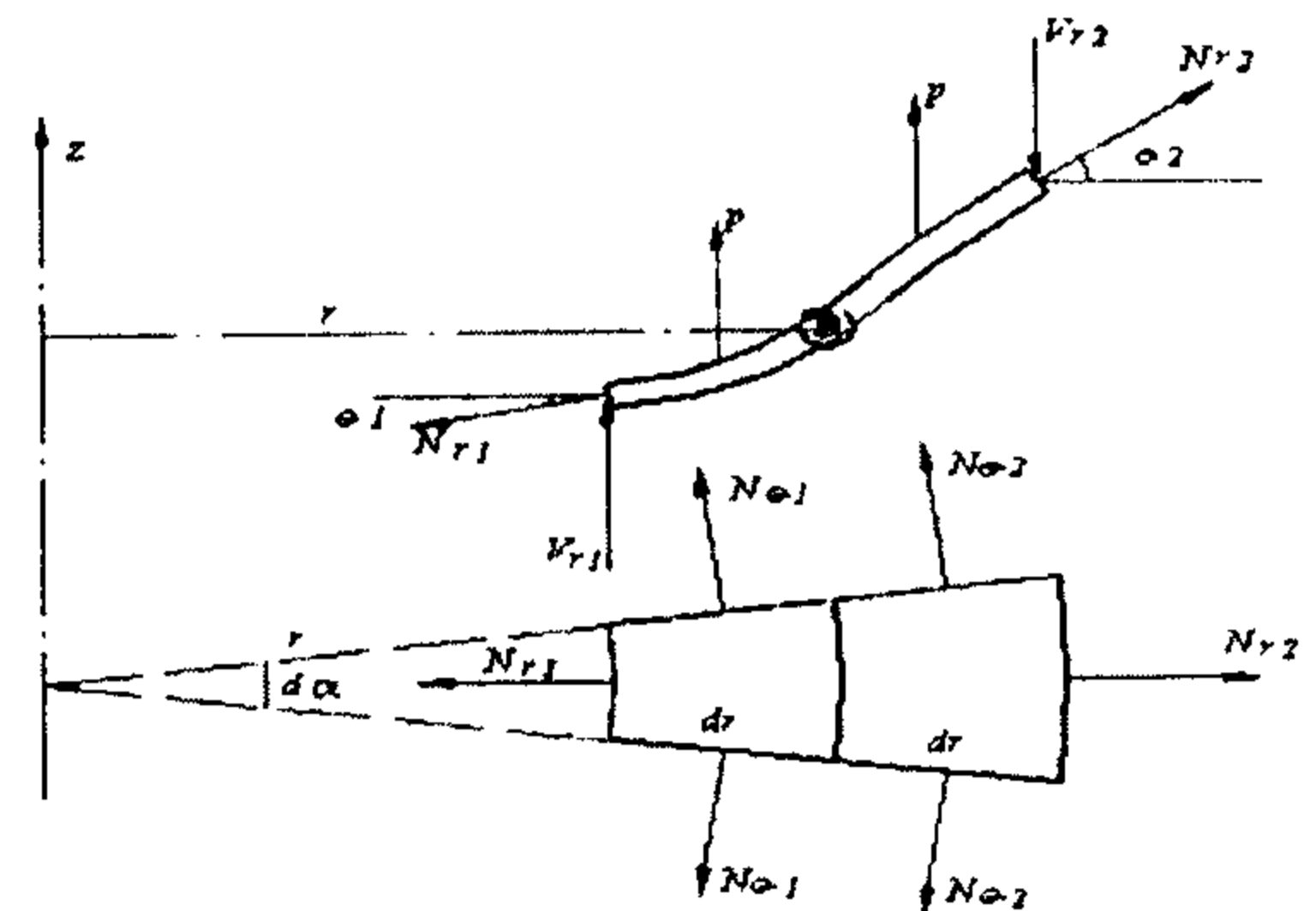
با توجه به روابط (۴) و (۶)، شرایط مرزی (۷) بر حسب متغیرهای جدید به این صورت نوشته می‌شود:

استفاده شده است در اینجا نیز از المان تغییر شکل نیافته استفاده می‌شود:

$$N_{r1} r d\alpha + 2(N_{\theta 1} + N_{\theta 2}) d\alpha \frac{dr}{2} =$$

$$N_{r2} (r + dr) d\alpha \Rightarrow N_{r1} = N_{r2} \quad (9-e)$$

برای نوشتن روابط تعادل در راستای عمودی مطابق شکل (۲) از المان تغییر شکل یافته استفاده می‌شود:



شکل ۲: المان تغییر شکل یافته صفحه.

$$(V_{r1} - N_{r1} \sin \theta_1) r d\alpha =$$

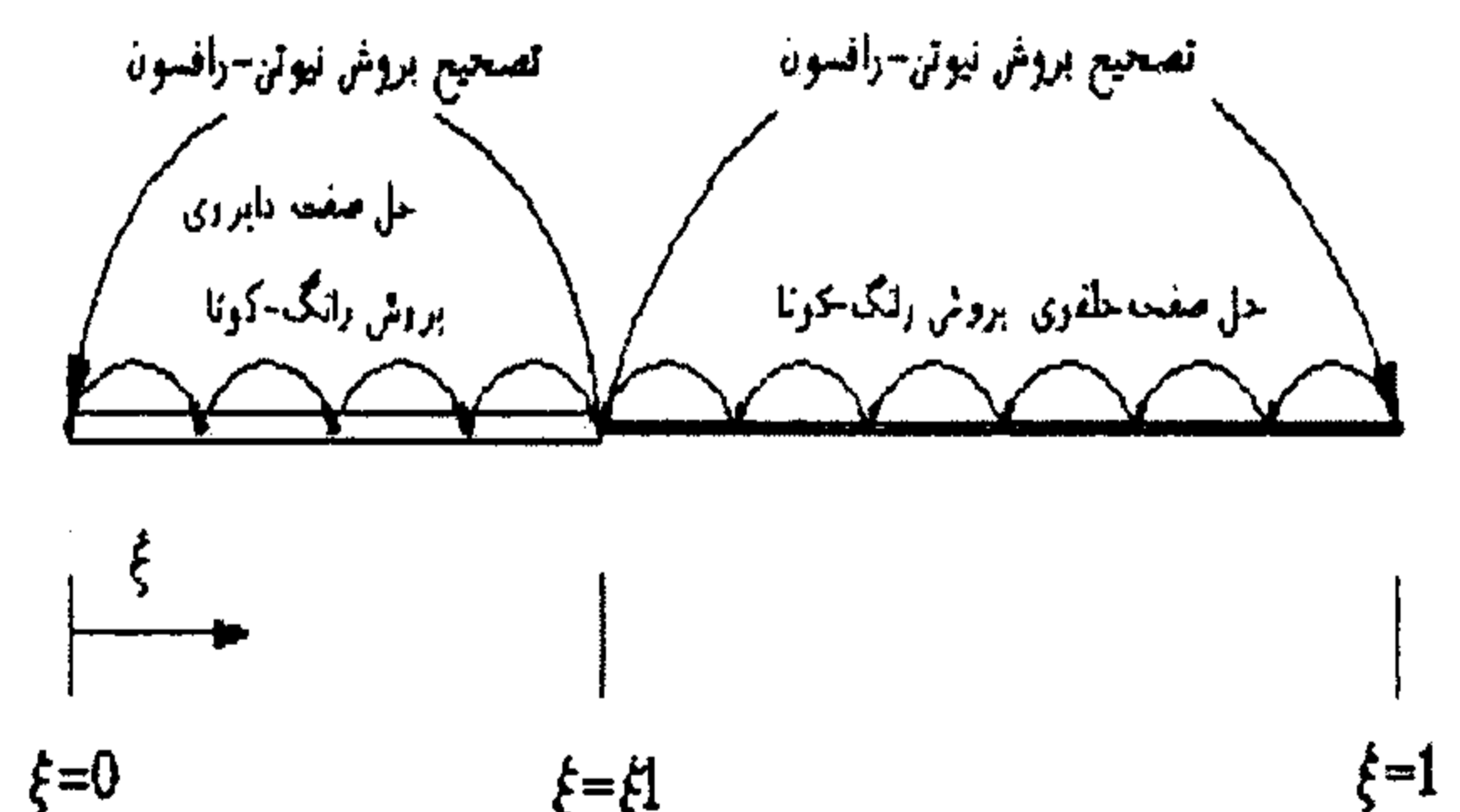
$$(V_{r2} - N_{r2} \sin \theta_2) (r + dr) d\alpha + -p dr \times r d\alpha \Rightarrow$$

$$V_{r1} - N_{r1} \sin \theta_1 = V_{r2} - N_{r2} \sin \theta_2$$

$$(\theta_1 = dw_1/dr, \theta_2 = dw_2/dr) \quad (9-f)$$

### حل معادلات به روش پرتاب موازی

در حل معادلات این سازه مطابق دیاگرام شکل (۳)، به روش پرتاب موازی باید سه مقدار پیش فرض برای صفحه حلقوی در شعاع خارجی و سه مقدار پیش فرض برای صفحه دایروی در مرکز گرفته شود.



شکل ۳: دیاگرام روش پرتاب موازی.

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \zeta_1 - \eta_1 \\
 d_2 &= \frac{1}{1-\nu_1^2} \left( \zeta_6 - \frac{\nu_1}{\xi_1} \zeta_5 \right) - \frac{1}{1-\nu_2^2} \left( \eta_6 - \frac{\nu_2}{\xi_1} \eta_5 \right) \\
 d_3 &= D_1 \left( \zeta_3 + \frac{\nu_1}{\xi_1} \zeta_2 \right) - D_2 \left( \eta_3 + \frac{\nu_2}{\xi_1} \eta_2 \right) \\
 d_4 &= \frac{D_1}{b} \left( \zeta_3 + \frac{\nu_1}{\xi_1} \zeta_2 \right) + K(\zeta_2 - \eta_2) \\
 d_5 &= \frac{D_1}{b^2} \left( \zeta_4 + \frac{1}{\xi_1} \zeta_3 - \frac{1}{\xi_1^2} \zeta_2 \right) - \frac{E_1 h_1}{1-\nu_1^2} \frac{\zeta_5}{\xi_1} \sin(\zeta_2) \\
 &\quad - \left( \frac{D_2}{b^2} \left( \eta_4 + \frac{1}{\xi_1} \eta_3 - \frac{1}{\xi_1^2} \eta_2 \right) - \frac{E_2 h_2}{1-\nu_2^2} \frac{\eta_5}{\xi_1} \sin(\eta_2) \right) \\
 d_6 &= \frac{E_1 h_1}{1-\nu_1^2} \frac{\zeta_5}{\xi_1} \cos(\zeta_2) - \frac{E_2 h_2}{1-\nu_2^2} \frac{\eta_5}{\xi_1} \cos(\eta_2) \\
 \bar{D} &= \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6\}^T
 \end{aligned} \tag{۱۴}$$

#### تعیین مقادیر پیش فرض

برای تعیین پیش فرض، از بارهای کم شروع کرده و با پیش فرض  $\bar{U} = 0$  مسئله را حل می‌کنیم. سپس از جوابهای به دست آمده برای حل در بار بالاتر استفاده می‌کنیم. هر بار جوابهای مربوط به یک بارگذاری خاص را به دست آورده و از مقادیر مربوط به آن به عنوان پیش فرض بارگذاری بعدی استفاده می‌کنیم.

#### محاسبات عددی و نتیجه گیری

در تحلیل سازه مورد بررسی باید وضعیت خیز و تنشها و تغییرات آن روی صفحه و مکان ماکزیمم تنشها مشخص شود. شکل (۴) خیز ناشی از بارگذاریهای بزرگ را روی دو صفحه به ازای نسبتهای متفاوت  $h_2/h_1$  نشان می‌دهد. هر چه نسبت  $h_2/h_1$  بیشتر می‌شود، خیز ماکزیمم کمتر می‌شود و بعلاوه زاویه شکست در مرز مشترک دو صفحه کمتر می‌شود. شکل (۵) تنش خمشی شعاعی را که مهمترین تنش در بحث تغییر شکل صفحات است و بیشترین مقدار را به خود اختصاص می‌دهد، نشان می‌دهد. این تنش در مرز خارجی صفحه حلقوی بیشترین مقدار را دارد. چون بیشترین تغییرات شیب در آن نقطه رخ می‌دهد، در مرز مشترک داریم،  $(S_{rb1} = S_{rb2})$  این مطلب خاصیت فنرهای حلزونی است که گشتاور را در جهت عمود بر صفحه خود انتقال می‌دهد. ولی شیب ممان

$$\begin{aligned}
 \xi = 0: & \quad \zeta_2 = 0, \zeta_4 = 0, \zeta_5 = 0 \\
 \xi = 1: & \quad \eta_1 = 0, \eta_2 = 0, \eta_6 - \nu_2 \eta_5 = 0 \\
 \xi = \xi_1 = \frac{a}{b}: & \\
 \zeta_1 - \eta_1 &= 0 \\
 \frac{1}{1-\nu_1^2} \left( \zeta_6 - \frac{\nu_1}{\xi_1} \zeta_5 \right) - \frac{1}{1-\nu_2^2} \left( \eta_6 - \frac{\nu_2}{\xi_1} \eta_5 \right) &= 0 \\
 D_1 \left( \zeta_3 + \frac{\nu_1}{\xi_1} \zeta_2 \right) - D_2 \left( \eta_3 + \frac{\nu_2}{\xi_1} \eta_2 \right) &= 0 \\
 \frac{D_1}{b} \left( \zeta_3 + \frac{\nu_1}{\xi_1} \zeta_2 \right) + K(\zeta_2 - \eta_2) &= 0 \\
 \frac{D_1}{b^2} \left( \zeta_4 + \frac{1}{\xi_1} \zeta_3 - \frac{1}{\xi_1^2} \zeta_2 \right) - \frac{E_1 h_1}{1-\nu_1^2} \frac{\zeta_5}{\xi_1} \sin(\zeta_2) \\
 - \left( \frac{D_2}{b^2} \left( \eta_4 + \frac{1}{\xi_1} \eta_3 - \frac{1}{\xi_1^2} \eta_2 \right) - \frac{E_2 h_2}{1-\nu_2^2} \frac{\eta_5}{\xi_1} \sin(\eta_2) \right) &= 0 \\
 \frac{E_1 h_1}{1-\nu_1^2} \frac{\zeta_5}{\xi_1} \cos(\zeta_2) - \frac{E_2 h_2}{1-\nu_2^2} \frac{\eta_5}{\xi_1} \cos(\eta_2) &= 0
 \end{aligned} \tag{۹}$$

#### بردار مقادیر پیش فرض و بردار خطا

مقادیر پیش فرض زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \zeta_1(0) & u_2 &= \zeta_3(0) & u_3 &= \zeta_6(0) \\
 u_4 &= \eta_3(1) & u_5 &= \eta_4(1) & u_6 &= \eta_5(1)
 \end{aligned} \tag{۱۰}$$

با توجه به شرایط مرزی (۹) و مقادیر پیش فرض، مقادیر اولیه در مرکز صفحه دایروی و در شعاع خارجی صفحه حلقوی به صورت زیر خواهد بود:

$$\bar{\zeta}(0) = \{u_1, 0, u_2, 0, 0, u_3\}^T \tag{۱۱}$$

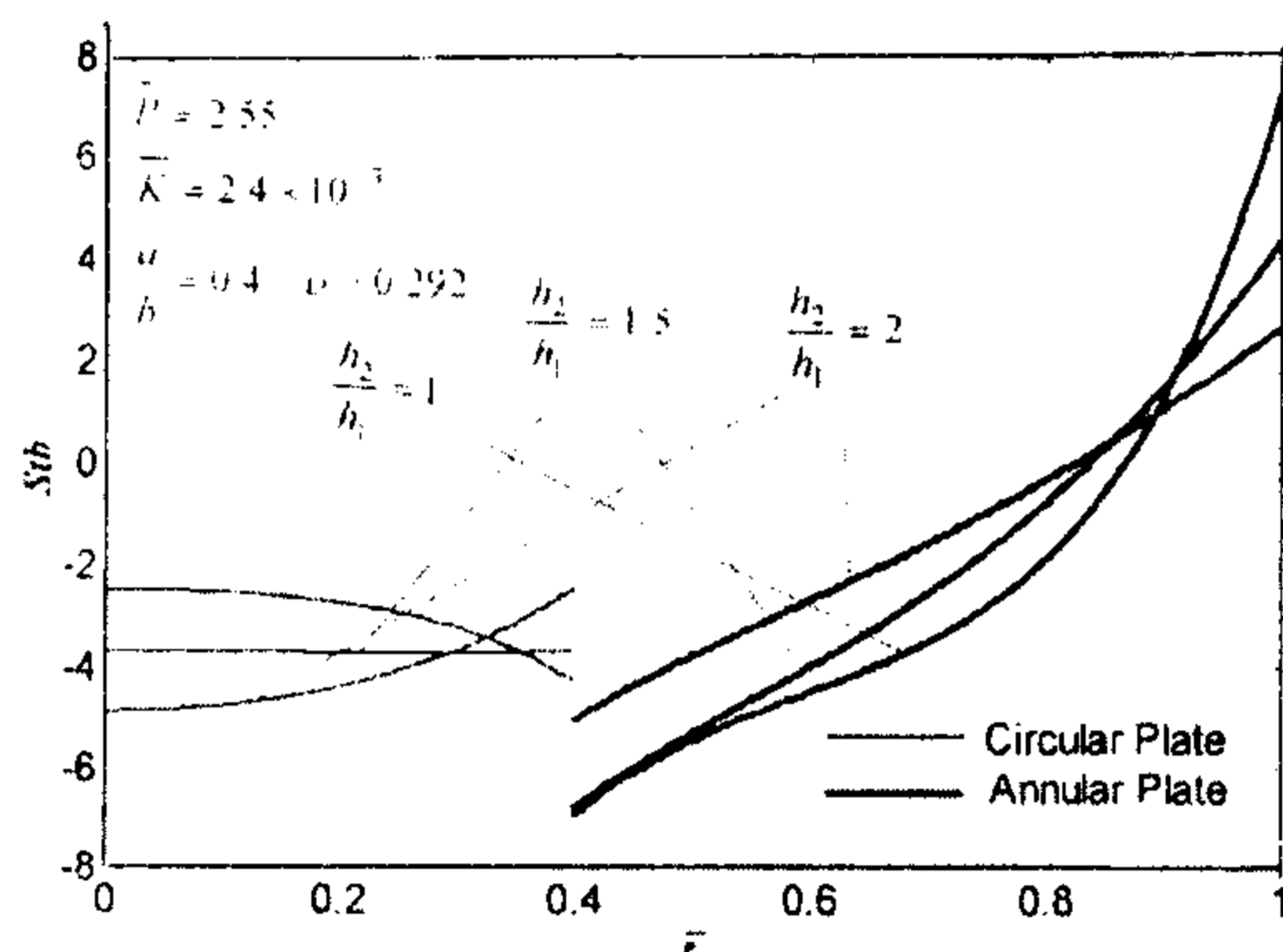
$$\bar{\eta}(1) = \left\{ 0, 0, u_4, u_5, u_6, \frac{b}{\nu_2} u_6 \right\}^T \tag{۱۲}$$

$$\bar{U} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}^T: \text{ بردار پیش فرض} \tag{۱۳}$$

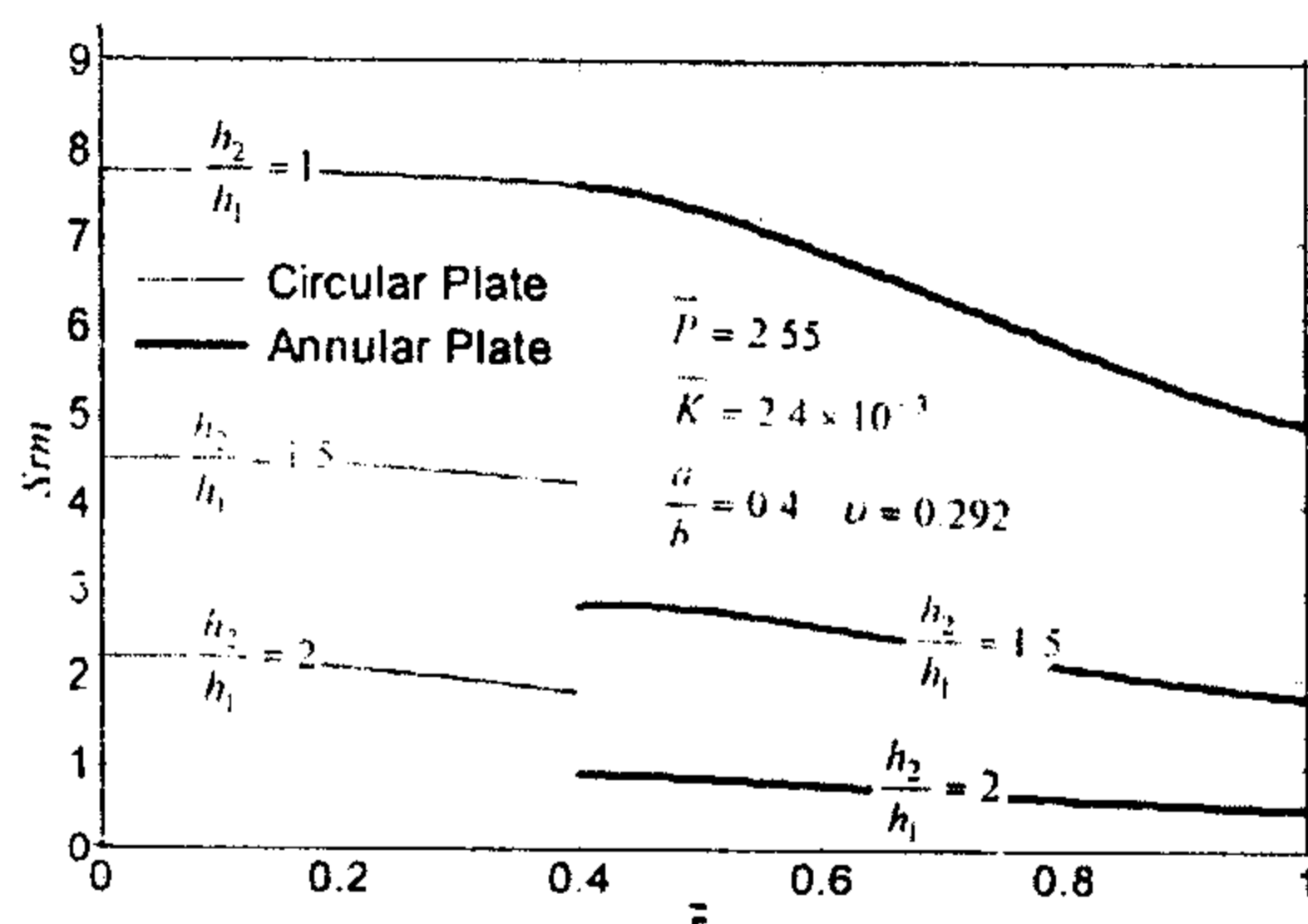
با توجه به معادلات (۹)، بردار خطا در مرز مشترک به این صورت محاسبه می‌شود:

در رابطه (۷-ع) آمده است. هرگاه ضخامتهای دو صفحه با هم برابر باشند، شیبهای نیروهای غشائی شعاعی در مرز مشترک روی دو صفحه برابر می‌شوند و در غیر این صورت در محل اتصال شکست خواهیم داشت. از شکل (۸) تنش غشائی محیطی ماکزیمم در مرکز صفحه دایروی رخ می‌دهد. اندازه این تنش در مقایسه با سه تنش قبلی کمتر است. مقدار ماکزیمم آن در مرکز برابر است با [۱۱]:

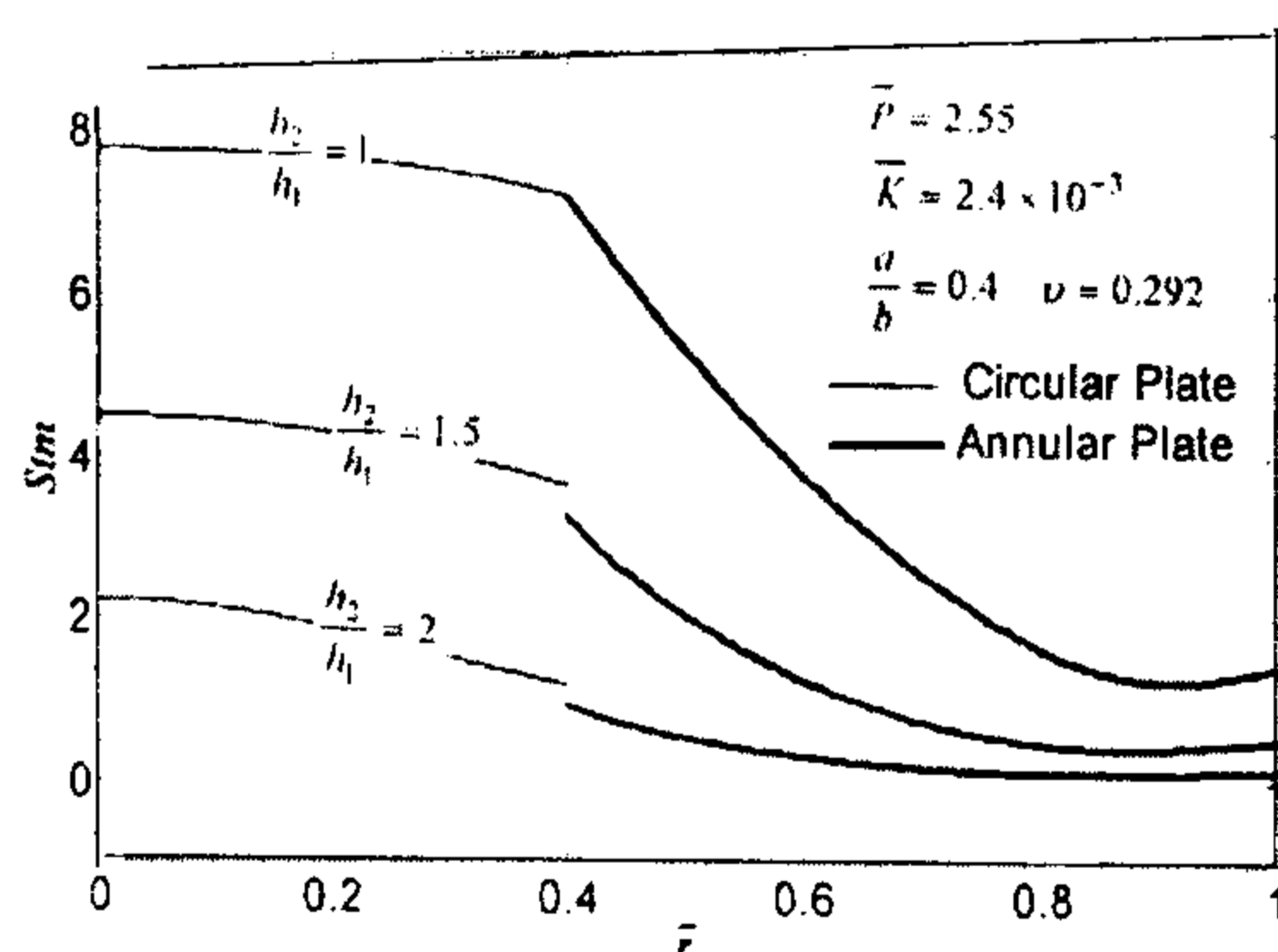
$$S_{im}(0) = S_{rm}(0)$$



شکل ۶: تنش خمشی محیطی دو صفحه به ازای  $h_2/h_1$  متفاوت.

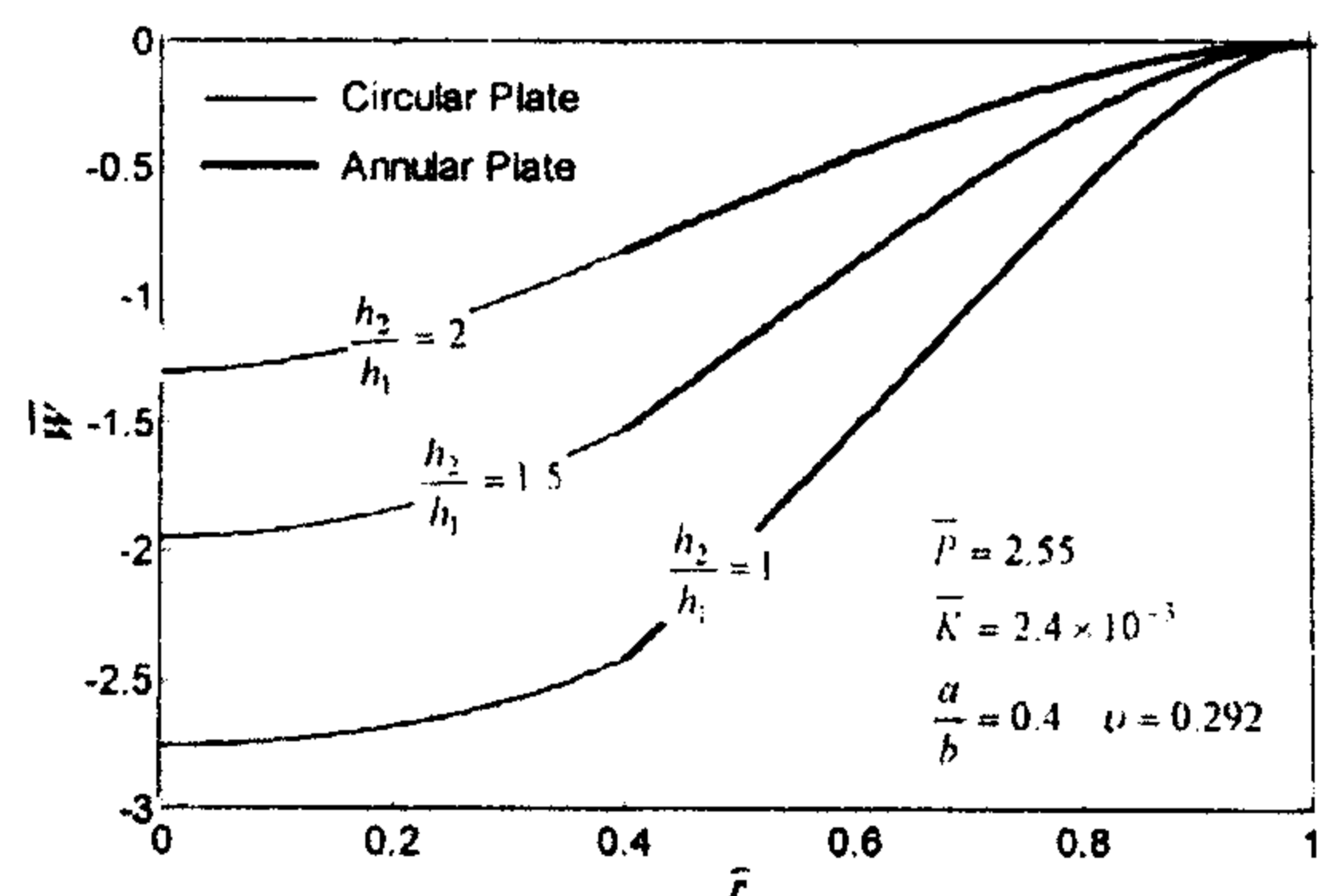


شکل ۷: تنش غشائی شعاعی دو صفحه به ازای  $h_2/h_1$  متفاوت.

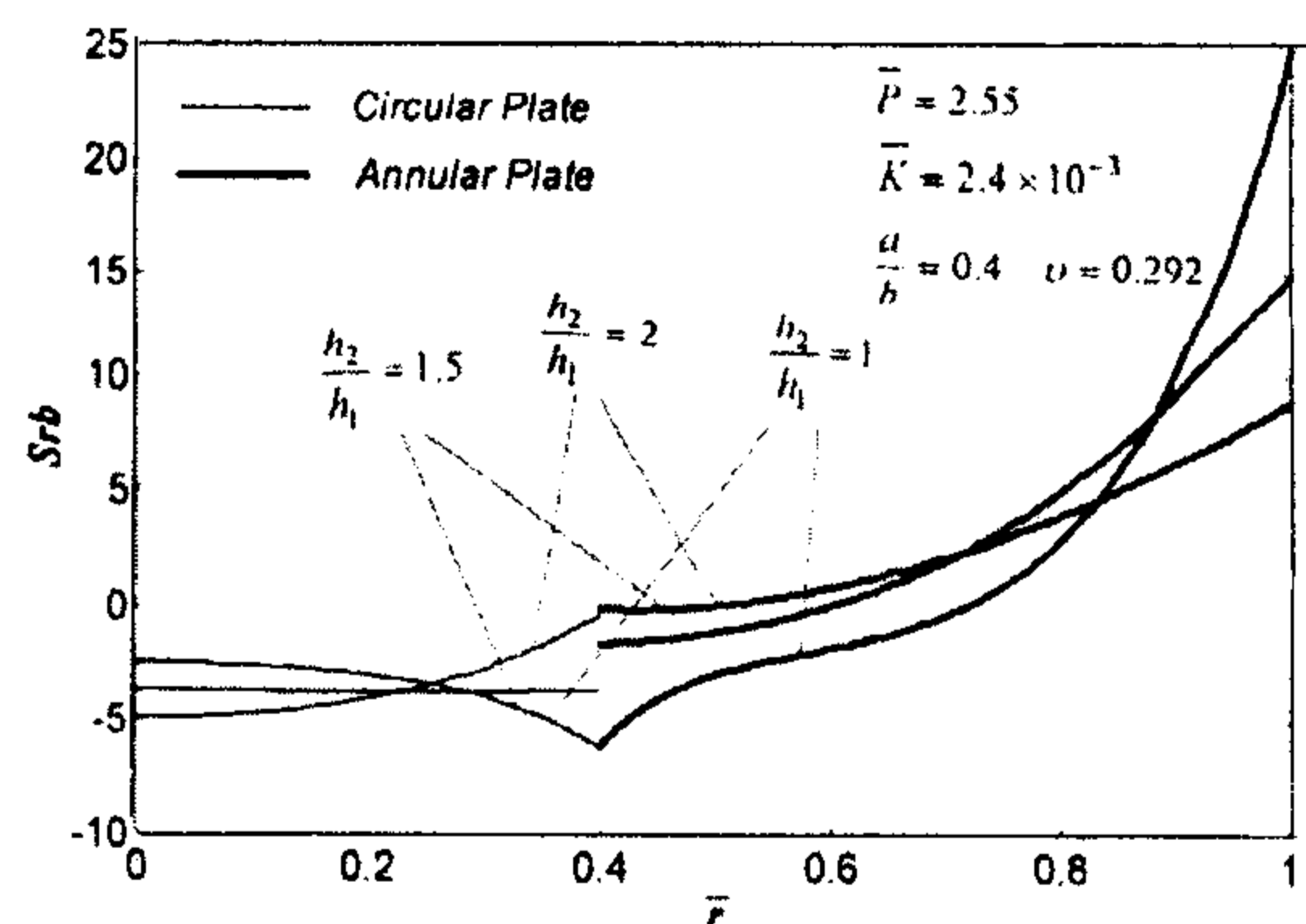


شکل ۸: تنش غشائی محیطی دو صفحه به ازای  $h_2/h_1$  متفاوت.

خمشی دو صفحه در مرز مشترک یکی نیست، چون تغییرات ممان خمشی روی دو صفحه یکی نیست. بعلاوه گسستگی مربوط به نمودارهای  $h_2/h_1 = 1.5$  و  $h_2/h_1 = 2$ ، به دلیل متفاوت بودن ضخامتهاست که از فرمول (۳) قابل درک است. شکل (۶) نشان می‌دهد که تنش خمشی محیطی بیشترین مقدار خود را در مرز خارجی صفحه حلقوی می‌گیرد و بعلاوه تنشهای خمشی محیطی در مرز مشترک با هم برابر نیستند. چون فنرهای حلزونی ممان خمشی در صفحه خودشان را منتقل نمی‌کنند و اندازه ممان خمشی محیطی، روی هر صفحه به تغییرات شیب همان صفحه مربوط می‌شود و چون شیبهای دو صفحه در محل اتصال یکی نیستند، تنشهای خمشی محیطی دو صفحه در محل اتصال مساوی نیستند.



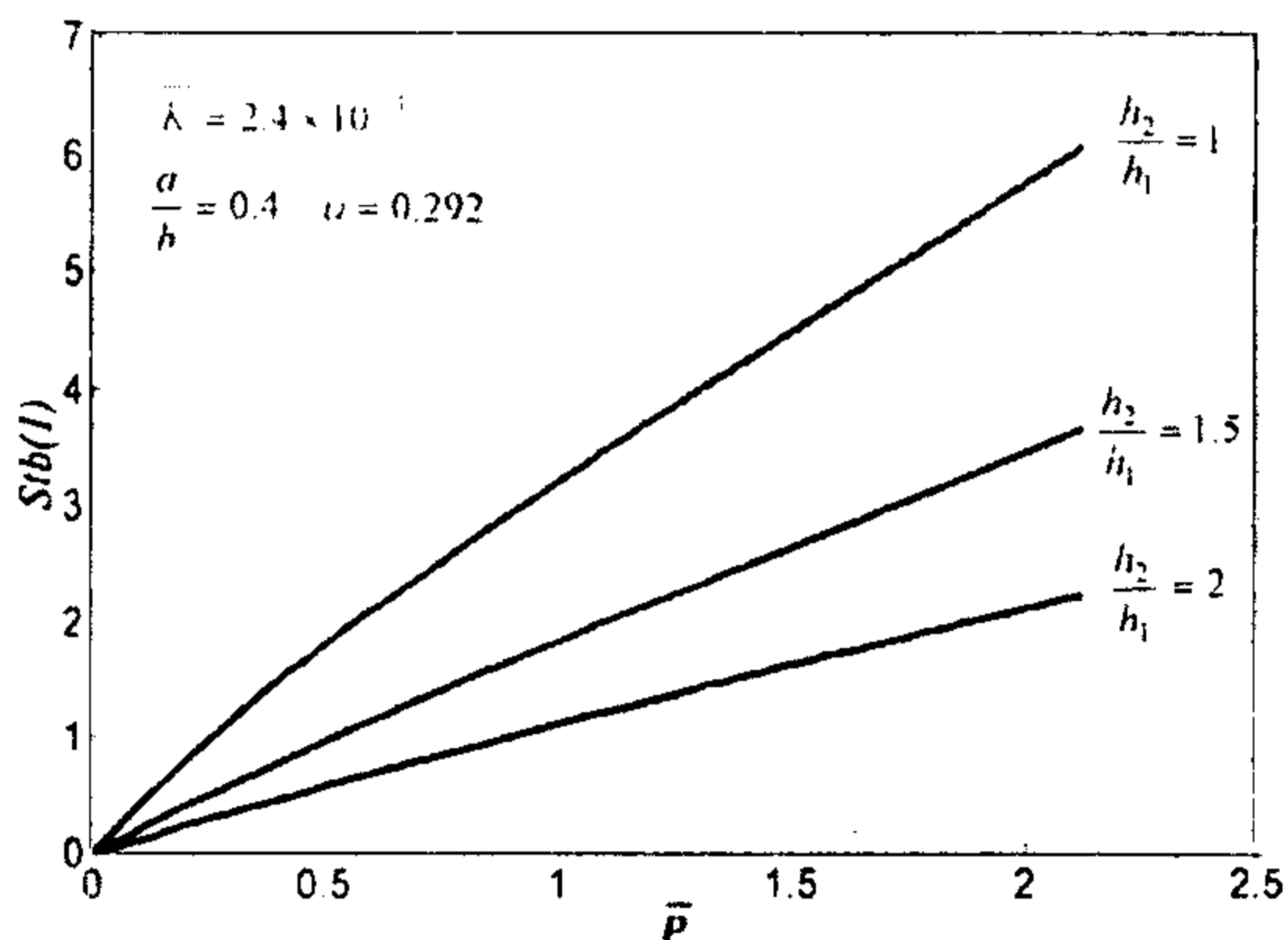
شکل ۴: خیز دو صفحه به ازای نسبت ضخامتهای متفاوت.



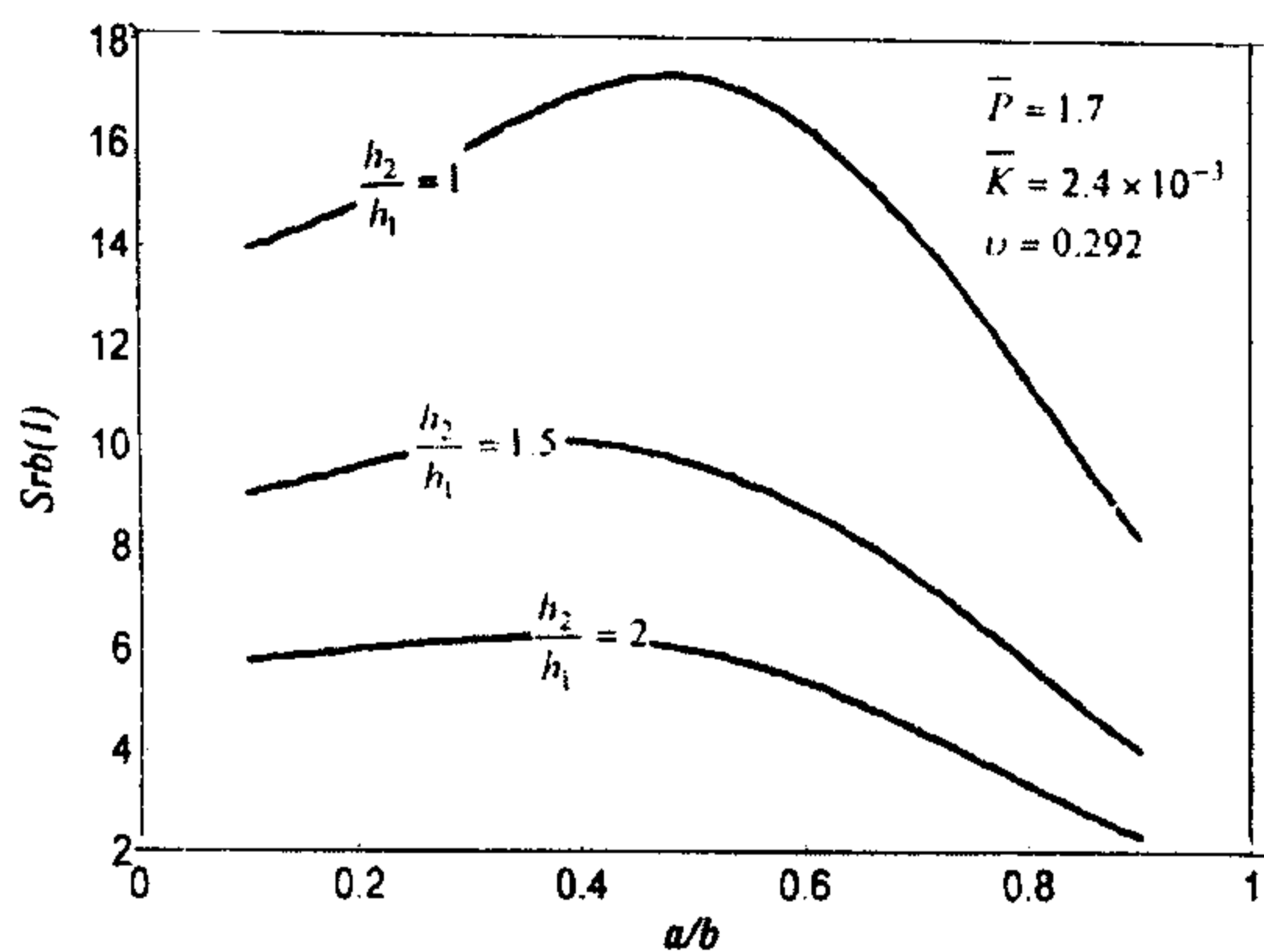
شکل ۵: تنش خمشی شعاعی دو صفحه به ازای  $h_2/h_1$  متفاوت.

شکل (۷) تنشهای غشائی شعاعی را نشان می‌دهد. تنش غشائی شعاعی ماکزیمم، در مرکز صفحه دایروی رخ می‌دهد. به ازای  $h_1 = h_2$ ، در مرز مشترک تنشهای غشائی شعاعی دو صفحه با هم برابر هستند که دلیل این مطلب

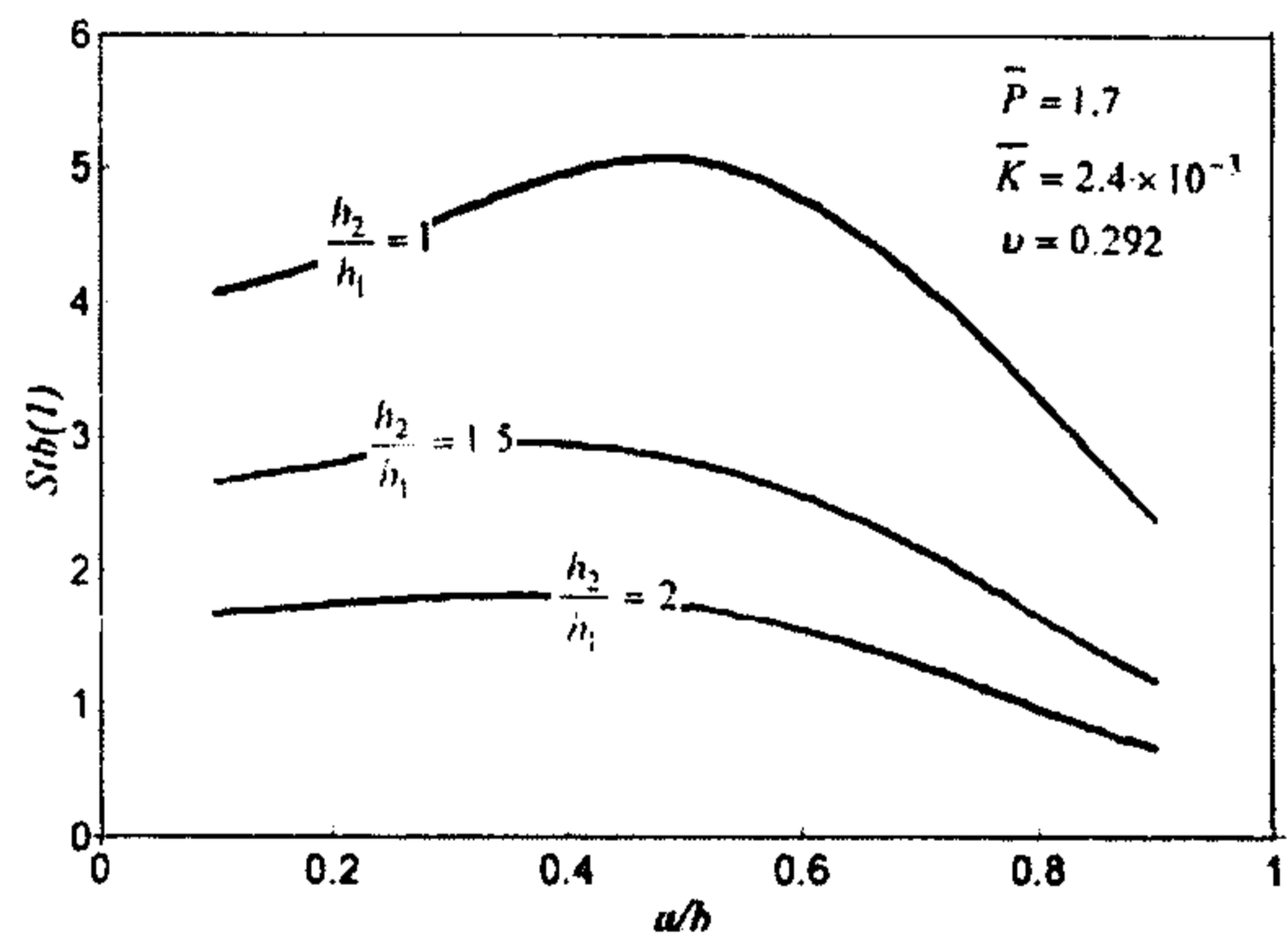
حسب تغییرات  $a/b$  در  $h_2/h_1$  های مختلف نشان می‌دهند. با توجه به این شکلها در  $a/b \approx 0.4$ ، ماکزیم تنشهای خمشی شعاعی و محیطی و همینطور ماکزیم تنشهای غشائی تمام مقادیر  $h_2/h_1$ ، بیشترین مقدار خود را می‌گیرند.



شکل ۱۱: تغییرات تنش خمشی محیطی در شعاع بیرونی صفحه حلقوی.

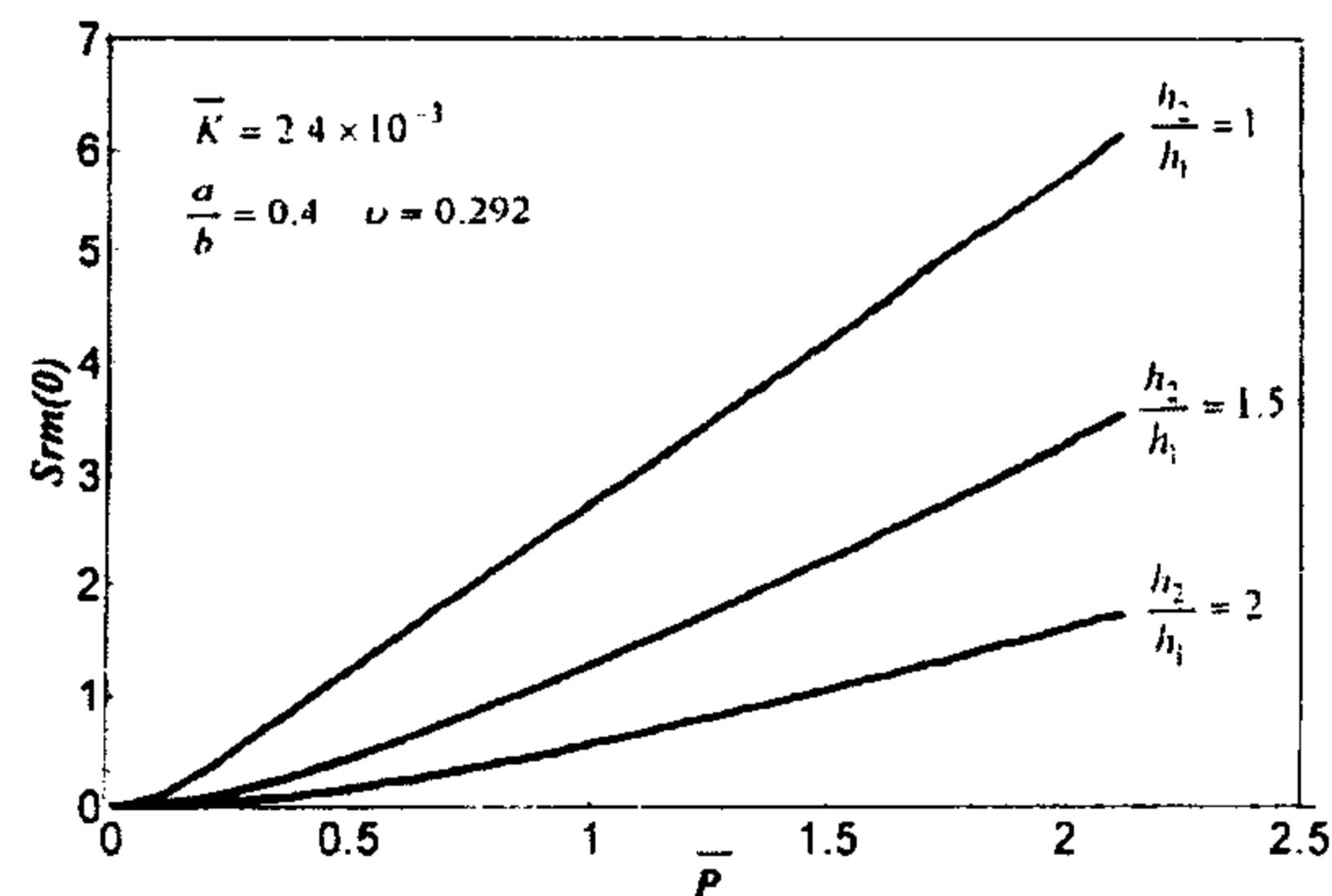


شکل ۱۲: تغییرات تنش خمشی شعاعی در شعاع بیرونی صفحه حلقوی.

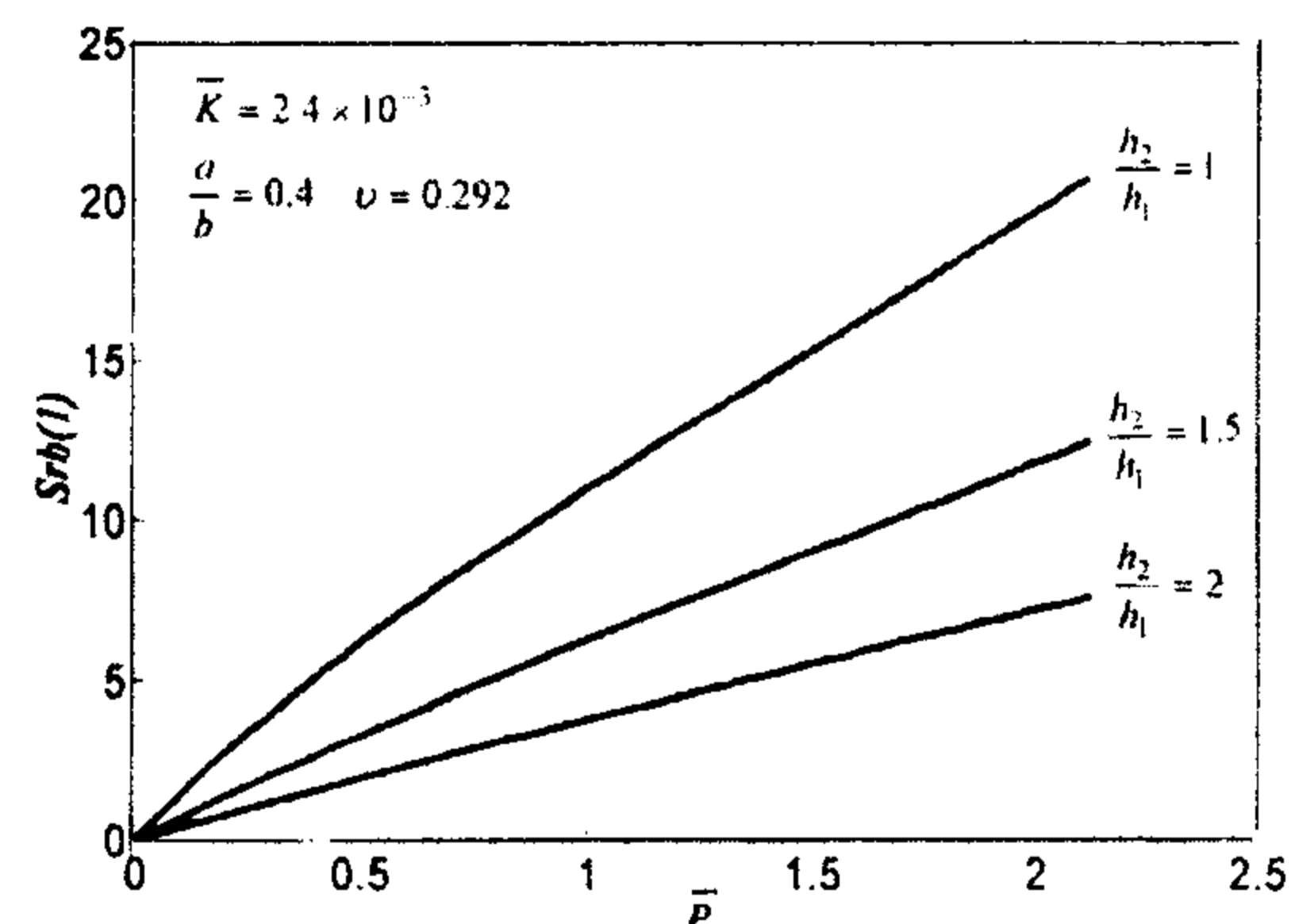


شکل ۱۳: تغییرات تنش خمشی شعاعی در شعاع بیرونی صفحه حلقوی.

شکلهای (۹) تا (۱۷) تغییرات مقادیر ماکزیم تنشهای خمشی شعاعی و محیطی و تنش غشائی شعاعی را بر حسب تغییرات پارامترهای مختلف نشان می‌دهند. شکلهای (۹)، (۱۰) و (۱۱) تغییرات تنش خمشی شعاعی، تنش خمشی محیطی و تنش غشائی شعاعی را بر حسب تغییرات  $P$  در  $h_2/h_1$  های مختلف نشان می‌دهند. با توجه به تغییر شیب منحنی نمودارهای نشان داده شده، با افزایش بار وارده، ماکزیم تنش شعاعی نسبت به تنشهای خمشی به تدریج افزایش می‌یابد؛ که نشان می‌دهد با افزایش بار اثرات نسبی تنش غشائی بیشتر می‌شود. با ازدیاد  $h_2/h_1$  هر سه مؤلفه تنش کم می‌شوند که نسبت تغییرات برای هر سه مؤلفه تقریباً برابر است. ولی هر چه  $h_2/h_1$  بیشتر می‌شود، تغییرات تنش بر حسب تغییرات  $h_2/h_1$  کمتر می‌شود.

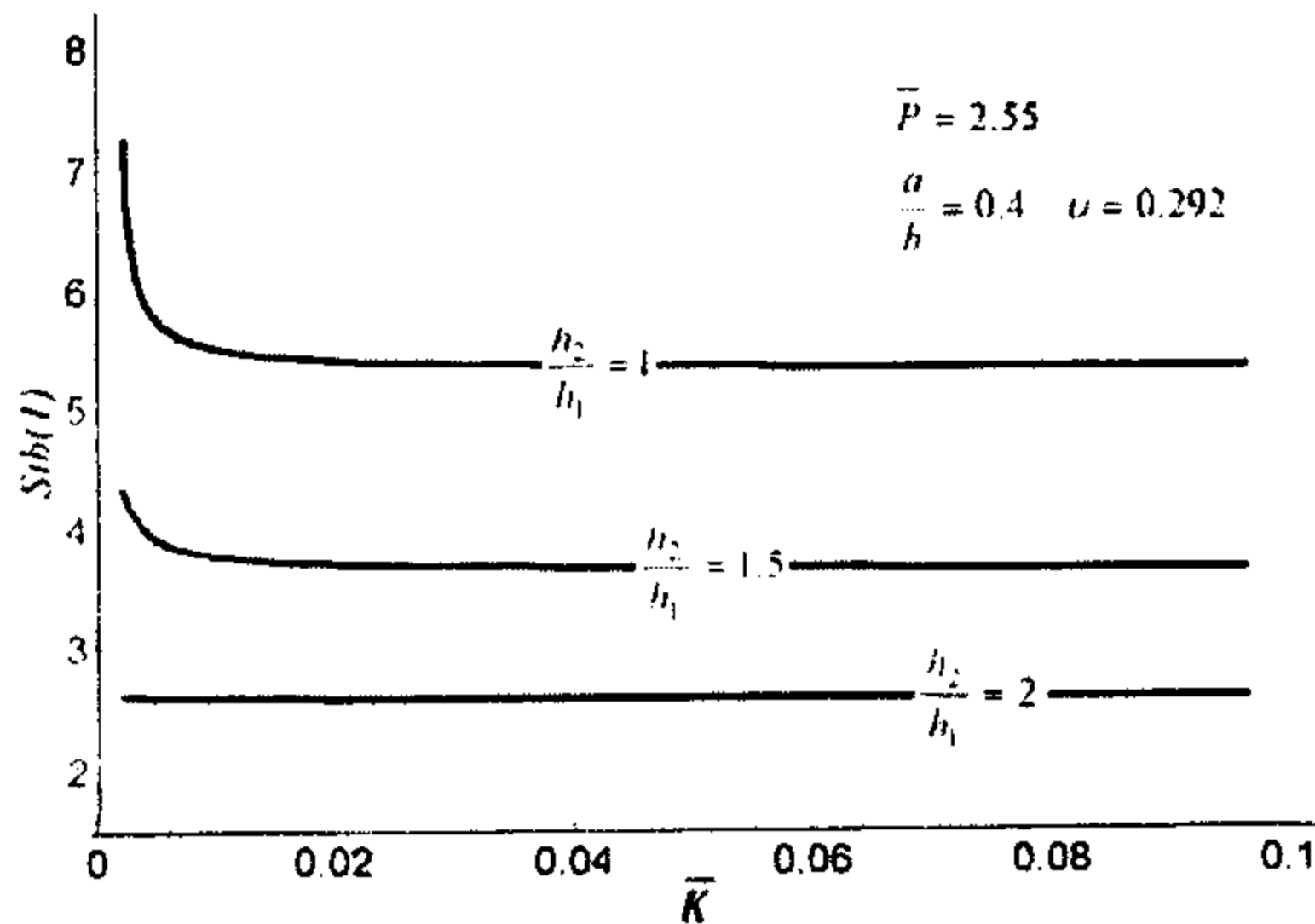


شکل ۹: تغییرات تنش غشائی شعاعی در مرکز صفحه دایروی.



شکل ۱۰: تغییرات تنش خمشی شعاعی در شعاع بیرونی صفحه حلقوی.

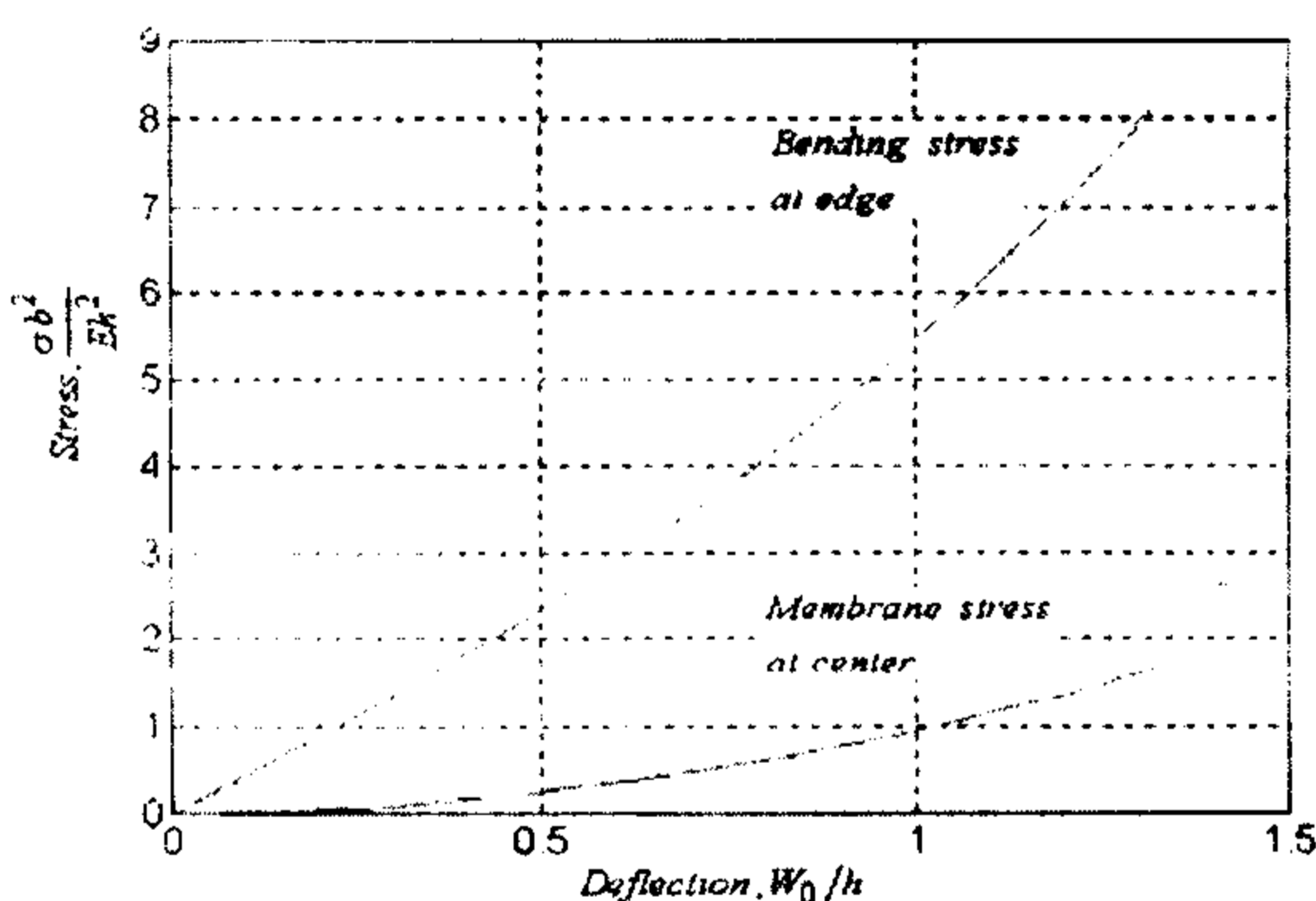
شکلهای (۱۲) و (۱۳) و (۱۴) تغییرات تنش خمشی شعاعی، تنش خمشی محیطی و تنش غشائی شعاعی را بر



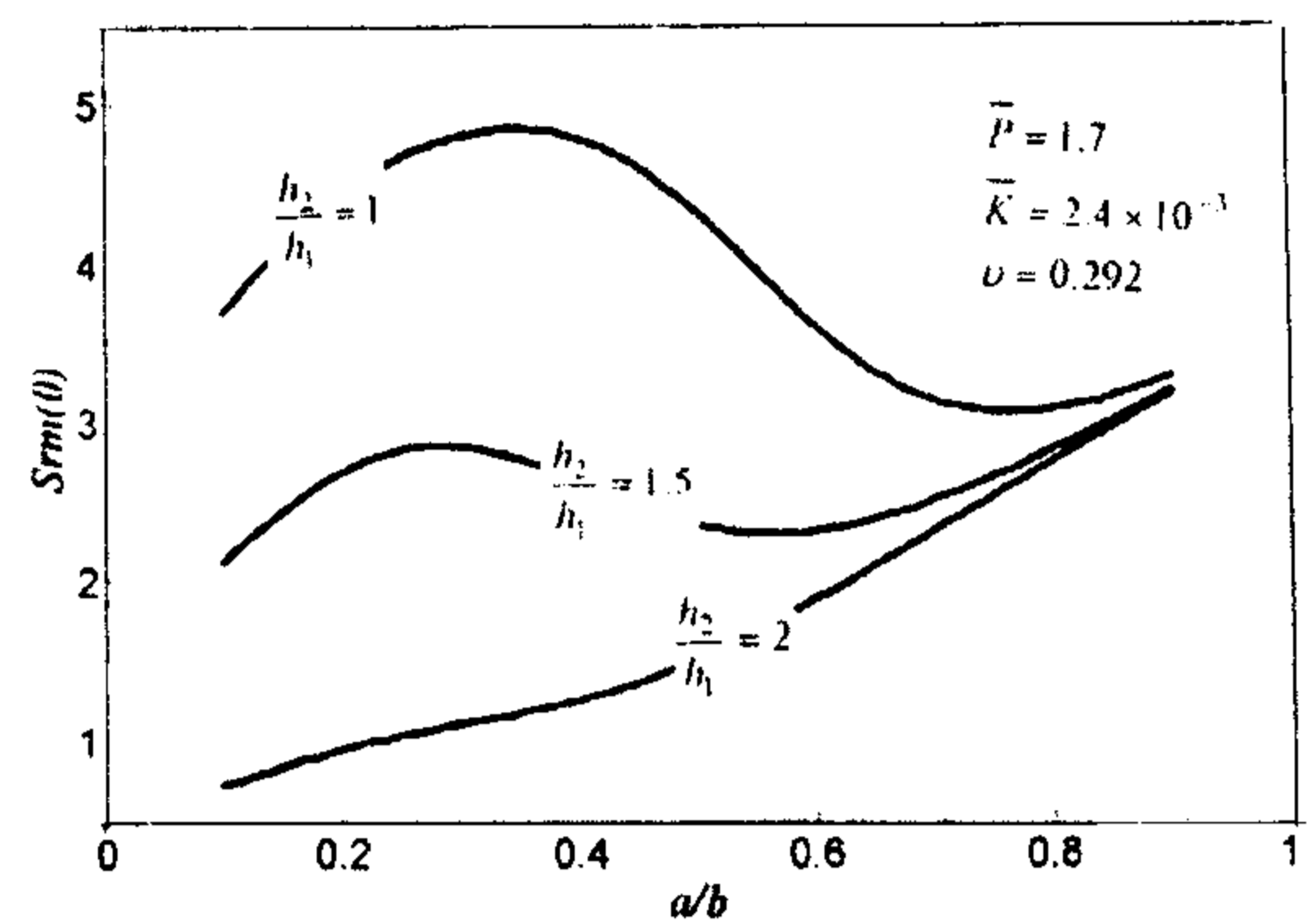
شکل ۱۷: تغییرات تنش خمشی محیطی شعاع بیرونی صفحه حلقوی.

### اعتبار تحلیل

چون این مسئله با این شرایط مرزی تاکنون تحلیل نشده است، معیاری برای بررسی درستی تحلیل وجود ندارد. با توجه به هندسه سازه و شرایط مرزی، هرگاه در این سازه  $k \rightarrow \infty$  میل کند و ضخامت و بارگذاری روی دو صفحه با هم برابر باشند، این سازه متناظر یک صفحه دایروی ساده با شرایط مرزی گیردار خواهد بود که ضخامت آن برابر ضخامت صفحات و شدت بارگذاری روی آن برابر شدت بارگذاری روی دو صفحه می‌باشد. این سازه تحت این شرایط خاص با معادلات و شرایط مرزی استخراج شده در این مقاله حل شده است که نتایج حاصله در شکل (۱۸) مشاهده می‌شود. مقایسه این نمودارها با نتایج حاصل از تحلیل یک صفحه تحت شرایط مرزی گیردار از مرجع [۱۲]، درستی تحلیل انجام شده در این مقاله را تصدیق می‌کند.

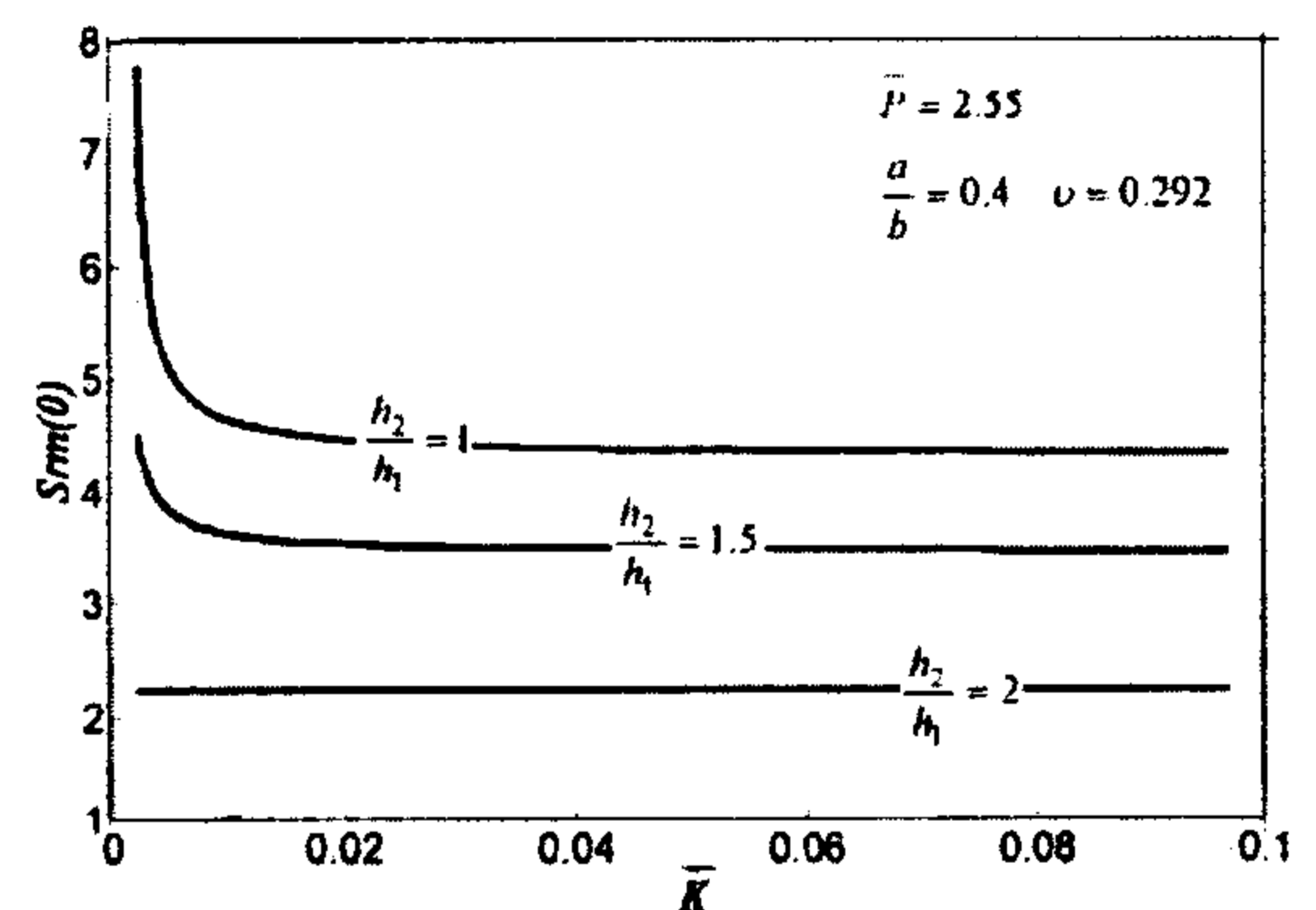


شکل ۱۸: تغییرات تنش خمشی شعاعی در لبه بیرونی صفحه حلقوی و تنش غشائی در مرکز صفحه دایروی بر حسب تغییرات خیز مرکز صفحه دایروی در  $k \rightarrow \infty$  که قابل مقایسه با یک صفحه دایروی تحت شرایط مرزی گیردار و بارگذاری ثابت است. ( $\nu = 0.3$ ).

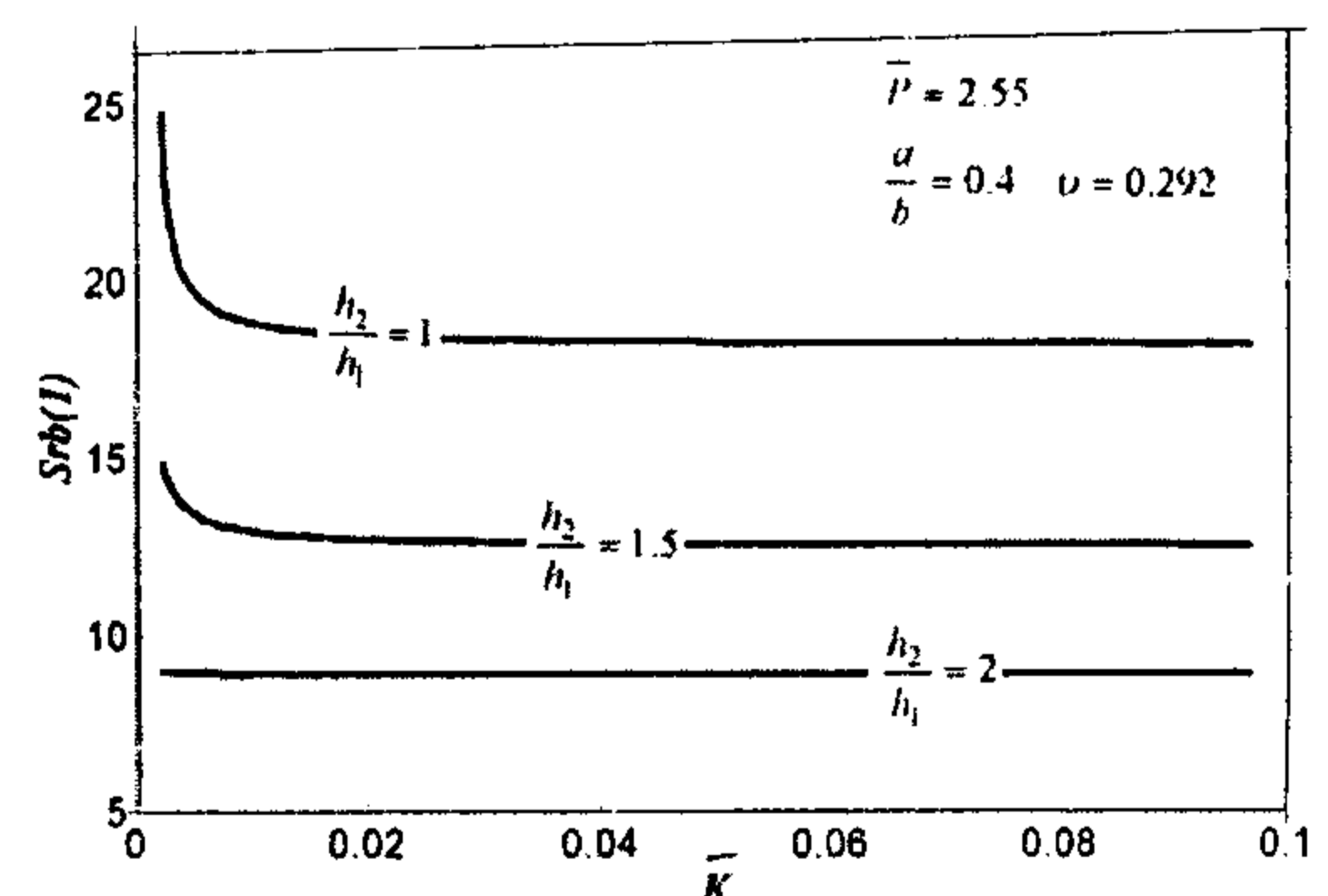


شکل ۱۴: تغییرات تنش غشائی شعاعی در مرکز صفحه دایروی.

شکل‌های (۱۵)، (۱۶) و (۱۷) نشان می‌دهند که با زیاد شدن  $k$ ، مؤلفه‌های تنش و همینطور تأثیر تغییرات  $k$  بر مؤلفه‌های تنش کم می‌شوند. البته هر چه نسبت  $h_2/h_1$  بیشتر شود، تغییرات تنشها بر حسب تغییرات  $k$  کمتر می‌شود. بعلاوه هر چه  $h_2/h_1$  بیشتر می‌شود، اثرات تغییرات  $h_2/h_1$  روی این سه مؤلفه تنش کمتر می‌شود. افت نسبی تنش غشائی شعاعی، نسبت به تنش خمشی شعاعی بیشتر است.



شکل ۱۵: تغییرات تنش غشائی شعاعی در مرکز صفحه دایروی.



شکل ۱۶: تغییرات تنش خمشی شعاعی شعاع بیرونی صفحه حلقوی.

### فهرست علائم

$\bar{W} = w/h_1$	مؤلفه بی‌بعد خیز برای هر دو صفحه	$\bar{\zeta}$	بردار مؤلفه‌های هر نقطه از صفحه دایروی
$X_1 = w_1/h_1$	مؤلفه بی‌بعد خیز صفحه دایروی	$\bar{\eta}$	بردار مؤلفه‌های هر نقطه از صفحه حلقوی
$X_2 = w_2/h_2$	مؤلفه بی‌بعد خیز صفحه حلقوی	$\bar{U}$	بردار مقادیر پیش‌فرض
$S_{rb} = \frac{\sigma_{rb} b^2}{Eh_1^2}$	مؤلفه بی‌بعد تنش خمشی شعاعی	$\bar{D}$	بردار خطا
$S_{tb} = \frac{\sigma_{\theta b} b^2}{Eh_1^2}$	مؤلفه بی‌بعد تنش خمشی محیطی	$\psi$	تابع تنش
$S_{rm} = \frac{\sigma_{rm} b^2}{Eh_1^2}$	مؤلفه بی‌بعد تنش غشائی شعاعی	$\sigma_{\theta b}, \sigma_{rb}$	تنشهای خمشی شعاعی و محیطی
$S_{tm} = \frac{\sigma_{\theta m} b^2}{Eh_1^2}$	مؤلفه بی‌بعد تنش غشائی شعاعی	$\sigma_{\theta m}, \sigma_{rm}$	تنشهای غشائی شعاعی و محیطی
$\bar{K} = \frac{K}{Eh_1^2}$	مؤلفه بی‌بعد ضریب سختی فنر حلزونی	$P$	شدت بار وارده
$\bar{P} = \frac{12(1-\nu^2)}{E} \left(\frac{b}{h}\right)^q$	مؤلفه بی‌بعد فشار	$a$	شعاع صفحه دایروی و شعاع داخلی صفحه حلقوی
$w, u$	مؤلفه تغییر مکان شعاعی و عرضی	$b$	شعاع خارجی صفحه حلقوی
$r, \theta, z$	مختصات استوانه‌ای	$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$	صلیب خمشی
$N_\theta, N_r$	نیروی غشائی شعاعی و محیطی بر واحد طول	$h_2, h_1$	ضخامت صفحات دایروی و حلقوی
		$K$	ضریب سختی فنر حلزونی
		$\varepsilon_\theta, \varepsilon_r$	کرنشهای شعاعی و محیطی
		$\nu, E$	مدول الاستیسیته و ضریب پواسون
		$M_\theta, M_r$	ممان خمشی شعاعی و محیطی بر واحد طول
		$\xi = r/b$	مؤلفه بی‌بعد شعاع

### مراجع

- 1 - Pal, M. C. (1969). "Large deflection of heated circular plates." *Acta Mechanica*, Vol. 8, No. 99, PP.82-103.
- 2 - Lorens, R. S. and Koeing, H. A. (1972). "An asymptotic solution for the large deflection of a circular plate with central hole." *International Journal of Nonlinear Mechanics*, Vol. 7, PP. 337-343.
- 3 - B.Keller, H. and Reiss, E. S. (1958). "Iterative solution for the nonlinear bending of circular plates." *Communication on Pure and Applied Mathematics*, Vol. XI, PP. 273-293.
- 4 - Turvey, G. J. and Salehi, M. (1988). "Large deflection analysis of eccentrically stiffened sector plates." *Computer and Structures*, Vol. 6, PP. 191-205.
- 5 - Ye, J. Q. (1991). "Large deflection analysis of axisymmetric circular plates with variable thickness by BEM." *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 15, No. 6, PP. 325-328.
- 6 - Ye, J. Q. (1992). "Axisymmetric large deflection analysis of annular plates and shells using BEM and FDM." *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 9, No. 4, PP. 283-287.
- 7 - Rammachandran, J. (1989). "Analysis of circular plates on elastic foundation using cubic splines." *31<sup>st</sup> ISTAM Congress*.
- 8 - Rajeeva Gaur. and Vaidaya, P. M. (1996). *A convex optimization approach for moderately large deflection problem in circular plates*. University of Illinois at Urbana – Champaign.



- 9 - Gorji, M., Abuyan, J. A., and Li, K. S. Y. (1991). "Analysis of thick circular plates undergoing large deflections." *Journal of Aerospace Engineering, ASCE*.
- 10 - Gorji, M. and Akileh, A. (1988). "Large deflection of circular plates with or without hole at center." *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 114, PP.1803.
- 11 - Sandman, B. (1970). *Harmonic Oscillation of circular and annular plates at finite amplitudes*. Dissertation of M.S. Kansas State University.
- 12 - Timoshenko, S. P. and Woinowsky. Kreiger, S. (1959). *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill Kogakusha, Ltd.

### واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1 - Von-Karman
  - 2 - Parallel Shooting Method
  - 3 - Moderately Large Deflection
  - 4 - Moderately Large Deflection
-

