

# پایداری پوسته های استوانه ای کامپوزیتی با تقویت محیطی تحت اثر بارهای ترکیبی

داود پورویس

دانشجوی دکتری سازه دانشکده مهندسی عمران - دانشگاه صنعتی امیرکبیر

محمد زمان کبیر

دانشیار دانشکده مهندسی عمران - دانشگاه صنعتی امیر کبیر

(تاریخ دریافت ۸۳/۹/۱۴، تاریخ تصویب ۸۴/۳/۲۱)

## چکیده

کاربرد پوسته های استوانه ای کامپوزیتی در سازه های هوا فضا و دریایی رشد قابل توجهی داشته است. مقاله حاضر پایداری پوسته های استوانه ای با تقویت های حلقوی را مورد بررسی قرار می دهد. بار کمانش با کمک تحلیل غیر خطی هندسی و با در نظر گرفتن اثر تغییر شکل های خمشی قبل از کمانش محاسبه می شود. فشار خارجی وارده به استوانه به دو صورت مرده با راستای ثابت و زنده (وابسته به تغییر شکل) در نظر گرفته می شود. روابط سینماتیکی بر اساس تئوری غیر خطی ساندرز<sup>۱</sup> به همراه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول<sup>۲</sup> استوار می باشد. تغییر مکان ها و دوران های استوانه و تقویت های محیطی<sup>۳</sup> با کمک سری های فوریه مناسب بیان میشوند. پوسته تحت اثر همزمان فشار محوری و فشار جانبی خارجی قرار دارد. استخراج معادلات حاکم بر مبنای روش ریتز<sup>۴</sup> استوار بوده و معادلات خطی شده با کمک ترکیب روش های نیوتن-رافسون و طول قوس<sup>۵</sup> حل می شوند. نتایج بصورت بار کمانش و منحنی های پس از کمانش برای لایه بندی های مختلف<sup>۶</sup> ارائه می گردد. همچنین تغییرات نیروهای اندرکنشی بین پوسته و تقویت کننده با تغییر بارهای وارده بررسی می شود.

**واژه های کلیدی:** پایداری، تقویت شده، کامپوزیت، تحلیل غیر خطی، ساندرز

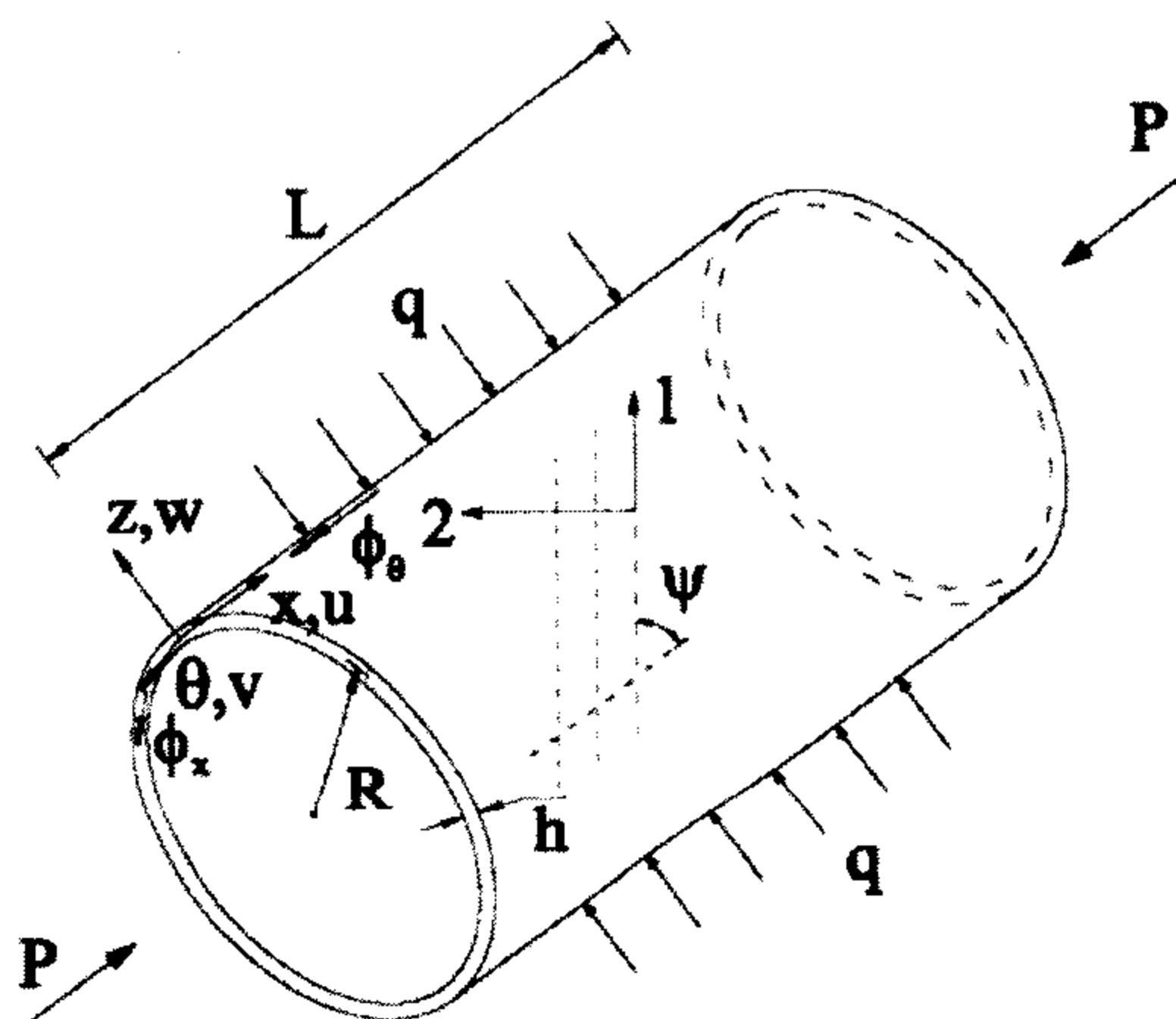
## مقدمه

برای مدل کردن سخت کننده های طولی مورد استفاده قرار گرفت. Arbocz و Hol [۳] تاثیر غیر خطی تغییر شکل های قبل از کمانش بر پیش بینی قابل اعتماد فشار کمانشی را بررسی کردند. Ley و همکاران [۴] کمانش پوسته های استوانه ای تقویت شده غیر ایزوتوپ دارای نقص اولیه<sup>۸</sup> را مطالعه کردند. المان های پوسته ای برای مدل کردن حلقه های تقویتی مورد استفاده قرار گرفت و اثر تغییر شکل های قبل از کمانش با کمک تحلیل غیر خطی جهت محاسبه بار بحرانی بکار رفت. Sridharan و Albers [۵] کمانش پوسته های ارتوتروپ با تقویت های محیطی تحت اثر فشار هیدرواستاتیک را مورد ارزیابی قرار دادند. تمرکز تحقیق آنها روی میزان تاثیر تغییر شکل های قبل از کمانش و مدل سازه ای بکار رفته، روی فشار بحرانی بود. اغلب کارهای گزارش شده و تحقیقات انجام شده در ارتباط با کمانش و پس از کمانش پوسته های استوانه ای کامپوزیتی تقویت شده محدود به روش اجزا محدود و استفاده از المان پوسته بوده است. در مطالعه

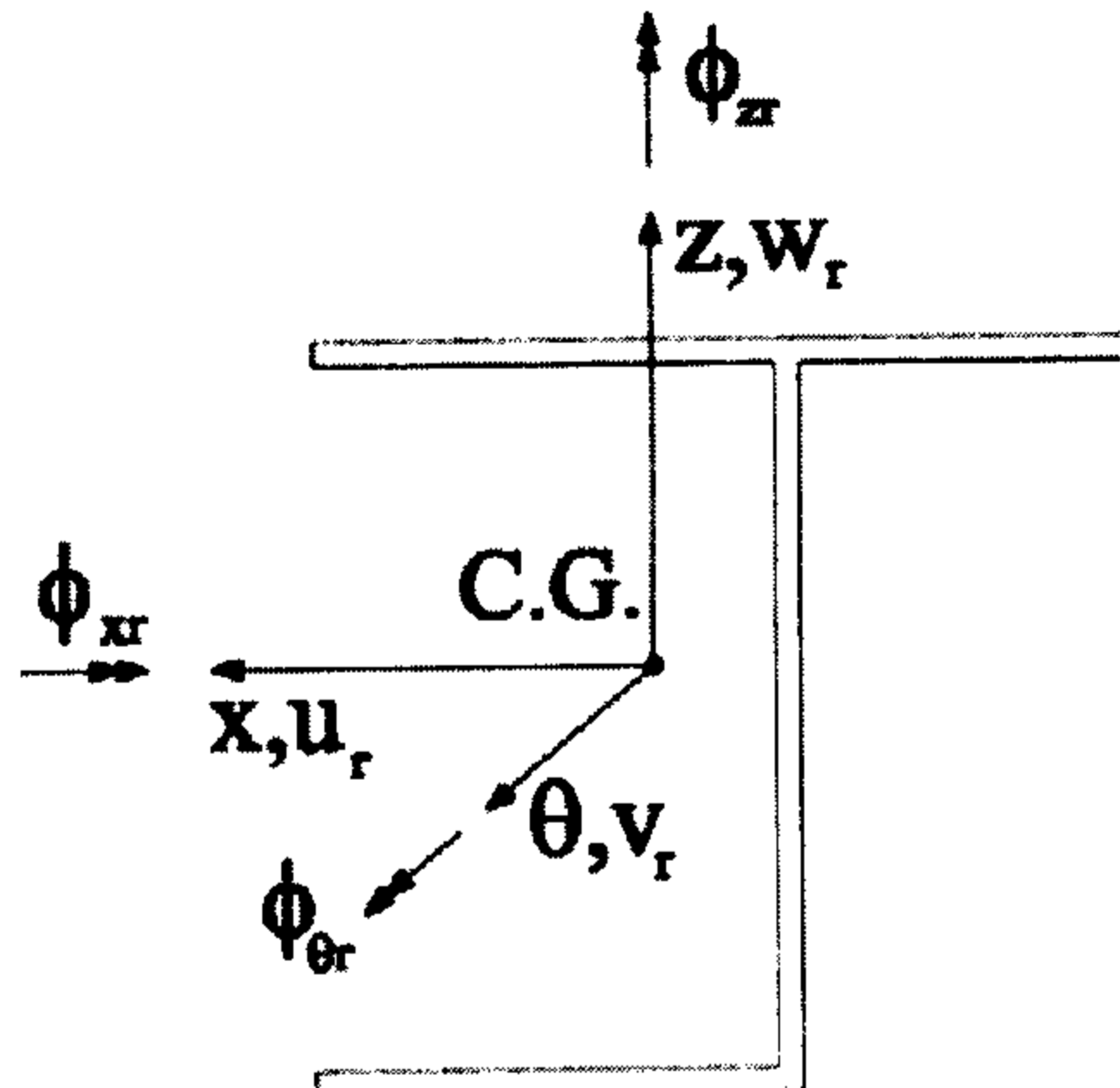
پوسته استوانه ای تقویت شده به عنوان عنصر سازه ای در صنایع هوا فضا و دریایی شناخته شده می باشد. بدلیل اینکه این گونه سازه ها در محدوده سازه های جدار نازک قرار می گیرند، تحلیل کمانشی آنها یکی از معیارهای مهم طراحی محسوب می شود. گسیختگی پوسته های ساخته شده از مصالح پلاستیکی تقویت شده با مقاومت بالا معمولاً در محدوده کمانش الاستیک رخ می دهد.

تحقیقات گسترده ای در ارتباط با پایداری استوانه های تقویت شده انجام شده که می توان به موارد زیر اشاره کرد. Sridharan و همکاران [۱] کمانش و پس از کمانش پوسته های استوانه ای کامپوزیتی تقویت شده با تقویت های طولی را بررسی کردند. پانل فرض شده به اندازه کافی طویل انتخاب شده تا تاثیر شرایط انتهایی نادیده گرفته شود. در کاری مشابه Dawe و Wang [۲] پس از کمانش پوسته های کامپوزیتی را با روش نوار محدود<sup>۷</sup> مطالعه کردند. المان های نواری با خطوط گرهی متفاوت

$\phi_\theta$  روی شکل معلومند. در همین شکل، فشار جانبی  $q$ ، نیروی محوری  $P$ ، طول  $L$ ، ضخامت  $h$  و شعاع انحنای سطح میانی پوسته  $R$ ، مشخص شده اند.  $\psi$  زاویه بین محور شماره ۱ مصالح و محور  $x$  پوسته می باشد. همچنین انحراف از راستای الیاف در تقویت کننده محیطی نسبت به محور محیطی سنجیده می شود. مقطع عرضی حلقه در شکل (۲) نشان داده شده و مرکز مختصات آن در مرکز ثقل مقطع عرضی قرار دارد و  $R_0$  نیز شعاع انحنای این مرکز است.



شکل ۱: پوسته استوانه ای با مختصات سیستم، ابعاد کلیدی و بارگذاری.



شکل ۲: قرارداد علامت تغییر مکانها و دورانه‌های تقویت کننده.

## تغییر مکان ها و دوران ها

تغییر مکان ها در نقطه دلخواهی از پوسته استوانه ای بصورت زیر بیان می شود.

$$\bar{U}(x, \theta, z) = U(x, \theta) + z\phi_x(x, \theta)$$

$$\bar{V}(x, \theta, z) = V(x, \theta) + z\phi_\theta(x, \theta)$$

$$\bar{W}(x, \theta, z) = W(x, \theta)$$

(۱)

حاضر، از روش نیمه تحلیلی با بکارگیری المان تیر<sup>۹</sup> برای مدل کردن تقویت کننده محیطی استفاده می گردد. مقاله حاضر به تحلیل پایداری پوسته های استوانه ای کامپوزیتی با تقویت محیطی تحت اثر بارهای ترکیبی (فشار محوری و فشار جانبی خارجی) میپردازد. شرایط مرزی بصورت تکیه گاه کلاسیک ساده (SS3) فرض میشود. بار بحرانی با کنترل علامت دترمینان ماتریس سختی مماسی<sup>۱۰</sup> قابل محاسبه است. یکی از اهداف این تحقیق مقایسه نیروهای اندرکنش بین پوسته و سخت کننده در محل تماس و قبل و بعد از کمانش برای لایه بندی های متفاوت پوسته و تقویت کننده می باشد. پیش بینی چنین نیروهایی در عناصر تقویت شده کامپوزیتی دارای اهمیت می باشد، چون در مقادیر بالای این تنش های تماسی، جدایی لایه ها و جدایی سخت کننده از جدار پوسته اتفاق می افتد. در این تحقیق، تغییرات بار کمانش و مسیره های پس از کمانش برای ترکیب های متفاوت لایه بندی پوسته و تقویت کننده رسم می شود. تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول هم برای پوسته و هم برای تقویت کننده در نظر گرفته شده و تئوری غیر خطی ساندرز برای روابط کرنش - تغییر مکان استفاده شده و نقص اولیه به شکل ضریبی از مد کمانش در نظر گرفته می شود.

## تئوری

تغییر مکان ها، دوران ها و نیروهای اندرکنشی بصورت بسط هایی از سری های فوریه در نظر گرفته می شوند. شرایط پیوستگی تغییر مکان ها در محل تماس پوسته و تقویت کننده با کمک ضرایب لاگرانژ Lagrange (multipliers) اقلان می شوند. معادلات تعادل با کمک روش ریتز بدست آمده و فرم خطی شده معادلات با کمک ترکیب روش های نیوتن-رافسون و طول قوس حل می گردند.

## هندسه پوسته و تقویت کننده

پوسته استوانه ای با مختصات کلی آن در شکل (۱)، نشان داده شده است. راستاهای اصلی مصالح با ۱ و ۲ مشخص می باشند و مولفه های  $x$ ،  $\theta$  و  $z$  از مختصات اصلی، تغییر مکان های  $U$ ،  $V$ ،  $W$  و دوران های  $\phi_x$  و

$$[C] = \begin{bmatrix} [A] & [B] & 0 & 0 \\ [B] & [D] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{55} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$A_{ij}$  ، صلبیت های غشایی ،  $B_{ij}$  ، جملات درگیر غشایی - خمشی ،  $D_{ij}$  صلبیت های خمشی و  $A_{44}$  و  $A_{55}$  صلبیت های برشی عرضی می باشند و بصورت زیر تعریف می شوند.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_h (1, z, z^2) \bar{Q}_{ij} dz$$

$$A_{44} = \int_h \bar{Q}_{44} dz$$

$$A_{55} = \int_h \bar{Q}_{55} dz \quad (8)$$

در روابط فوق  $\bar{Q}_{ij}$  سختی های کاهش یافته تبدیل شده<sup>۱۱</sup> می باشند [۷].

### روابط کرنش - تغییر مکان

کرنش ها در نقطه دلخواهی از ضخامت پوسته برحسب کرنش های سطح میانی و انحناهای پوسته قابل بیان می باشند.

$$e_x = \varepsilon_x + z\kappa_x$$

$$e_\theta = \varepsilon_\theta + z\kappa_\theta$$

$$e_{x\theta} = \gamma_{x\theta} + z\kappa_{x\theta} \quad (9)$$

که در آن کرنش های سطح میانی و انحناهای پوسته بر اساس تئوری ساندرز [۸] و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و نقص اولیه ( $\hat{W}$ ) ، به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \hat{W}}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{W}{R} + \frac{1}{2R^2} \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} - cV \right)^2 + \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial \hat{W}}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} - cV \right)$$

$$\gamma_{x\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} - cV \right) + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \hat{W}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial \hat{W}}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} - cV \right)$$

که در آن  $U(x, \theta)$  ،  $V(x, \theta)$  و  $W(x, \theta)$  بترتیب تغییر مکان های سطح میانی پوسته در راستاهای طولی ، محیطی و شعاعی  $x$  ،  $\theta$  و  $z$  در نقطه دلخواهی از تقویت کننده محیطی بصورت زیر تعریف می شوند [۶].

$$\bar{U}_r(\theta, z) = U_r(\theta) + z\phi_{\theta r}(\theta)$$

$$\bar{V}_r(x, \theta, z) = V_r(\theta) + z\phi_{xr}(\theta) + x\phi_{zr}(\theta) - \omega(x, z)\tau_r(\theta)$$

$$\bar{W}_r(x, \theta) = W_r(\theta) - x\phi_{\theta r}(\theta) \quad (2)$$

$U_r$  ،  $V_r$  و  $W_r$  تغییر مکان های مرکز ثقل تقویت کننده و  $\phi_{xr}$  ،  $\phi_{\theta r}$  و  $\phi_{zr}$  بترتیب دوران ها حول محورهای ذکر شده می باشند.  $\omega(x, z)$  تابع تابیدگی (warping) مقطع سخت کننده و  $\tau_r$  ضریب مجهول تابیدگی می باشد. با صرف نظر کردن از کرنش برشی ناشی از تابیدگی ،  $\tau_r$  برابر است با:

$$\tau_r = \frac{1}{R_0} \left( \frac{\partial \phi_{\theta r}}{\partial \theta} + \phi_{zr} \right) \quad (3)$$

### معادلات رفتاری

رابطه تنش-کرنش پوسته بصورت زیر بیان می شود.

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\} \quad (4)$$

که در آن  $[C]$  ماتریس صلبیت مصالح بوده و بردار برآیندهای تنش بصورت زیر تعریف می شود.

$$\{\sigma\} = [N_x, N_\theta, N_{x\theta}, M_x, M_\theta, M_{x\theta}, Q_x, Q_\theta]^T \quad (5)$$

$N$  ،  $M$  و  $Q$  بترتیب نیروهای صفحه میانی ، لنگرها و مولفه های برشی خارج از صفحه می باشند. بردار کرنش تعمیم یافته  $\{\varepsilon\}$  نیز دارای فرم زیر است.

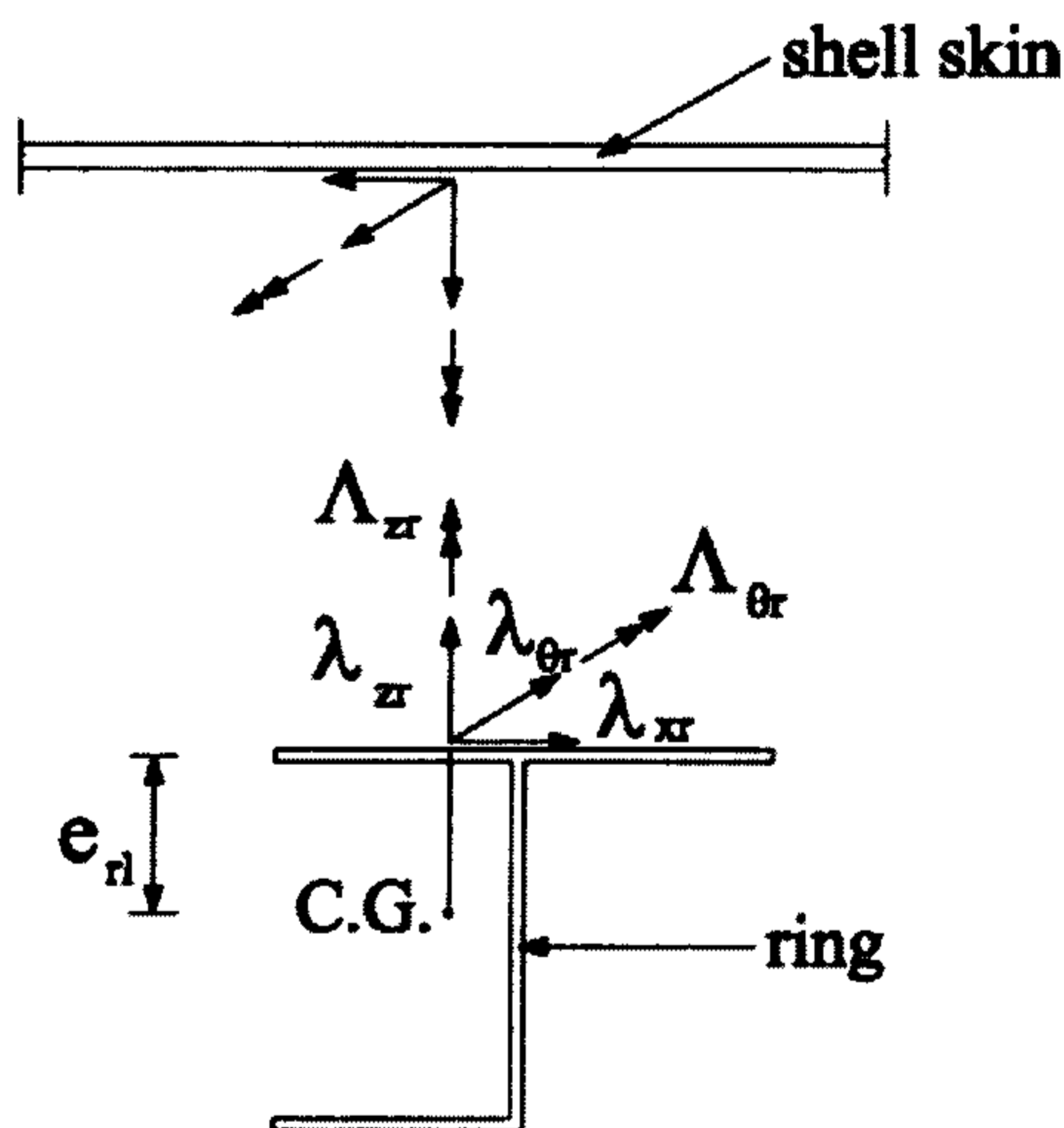
$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x, \varepsilon_\theta, \gamma_{x\theta}, \kappa_x, \kappa_\theta, \kappa_{x\theta}, \gamma_{xz}, \gamma_{\theta z}]^T \quad (6)$$

که در آن  $\varepsilon_x$  ،  $\varepsilon_\theta$  و  $\gamma_{x\theta}$  کرنش های سطح میانی پوسته و  $\kappa_x$  ،  $\kappa_\theta$  و  $\kappa_{x\theta}$  انحناها به ترتیب در راستای صفحات  $x-z$  و  $\theta-z$  می باشند.  $\kappa_{x\theta}$  انحنای پیچشی صفحه ای و  $\gamma_{\theta z}$  ،  $\gamma_{xz}$  بیانگر کرنش های برشی عرضی هستند. ماتریس  $[C]$  نیز با رابطه زیر مشخص می شود.

$$\begin{aligned} \phi_x(x, \theta) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \phi_{mn} \cos(\alpha_m x) \cos(n\theta) \\ \phi_\theta(x, \theta) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \phi_{\theta mn} \sin(\alpha_m x) \sin(n\theta) \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن  $\alpha_m = \frac{m\pi}{L}$  و  $M$  و  $N$  حد بالایی اعداد صحیح  $m$  و  $n$  می باشند. ضرایب مجهول  $U_{mn}$ ،  $V_{mn}$ ،  $W_{mn}$ ،  $\phi_{xmn}$  و  $\phi_{\theta mn}$  در هر گام افزایشی محاسبه می شوند. بطور مشابه تغییر مکان ها و دوران های مرکز ثقل تقویت کننده بصورت زیر تقریب زده می شوند:

$$\begin{aligned} U_r(\theta) &= \sum_{n=0}^N U_m \cos(n\theta) \\ V_r(\theta) &= \sum_{n=1}^N V_m \sin(n\theta) \\ W_r(\theta) &= \sum_{n=0}^N W_m \cos(n\theta) \\ \phi_{xr}(\theta) &= \sum_{n=1}^N \phi_{xm} \sin(n\theta) \\ \phi_{\theta r}(\theta) &= \sum_{n=0}^N \phi_{\theta m} \cos(n\theta) \\ \phi_{zr}(\theta) &= \sum_{n=1}^N \phi_{zm} \sin(n\theta) \end{aligned} \quad (13)$$



شکل ۳: نیروهای اندرکنش بین پوسته و تقویت کننده.

بر اساس شرایط پیوستگی، ضرایب مجهول در روابط (۱۳) به ضرایب مجهول پوسته مربوط می شوند. در شکل (۳)، نیروهای اندرکنشی در سطح تماس پوسته و حلقه

$$\begin{aligned} \kappa_x &= \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \kappa_\theta &= \frac{1}{R} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} \\ \kappa_{x\theta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \phi_x}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \phi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \\ \gamma_{\theta z} &= \phi_\theta + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} - cV \right) \end{aligned} \quad (10)$$

اگر در رابطه فوق  $c=0$  قرار داده شود، روابط کرنش-تغییر مکان بر اساس تئوری دائل<sup>۱۲</sup> بدست می آید و برای  $c=1$  روابط کرنش - تغییر مکان ساندرز حاصل می شود. بطور مشابه برای تقویت کننده، کرنش های غیر صفر برابرند با:

$$\begin{aligned} e_\theta &= \frac{1}{(R_0 + z)} \left( \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \theta} + \bar{W}_r \right) + \frac{1}{2R_0^2} \left( V_r - \frac{\partial W_r}{\partial \theta} \right)^2 \\ &+ \frac{1}{R_0^2} \left( \frac{\partial \hat{W}}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial W_r}{\partial \theta} - V_r \right) + \frac{1}{2R_0^2} \left( \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right)^2 \\ \gamma_{x\theta} &= \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial x} + \frac{1}{(R_0 + z)} \frac{\partial \bar{U}_r}{\partial \theta} \\ \gamma_{z\theta} &= \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial z} + \frac{1}{(R_0 + z)} \left( \frac{\partial \bar{W}_r}{\partial \theta} - \bar{V}_r \right) \end{aligned} \quad (11)$$

در این روابط،  $R_0$  فاصله مرکز ثقل تقویت کننده تا مرکز استوانه می باشد. با فرض دوران های کوچک تقویت کننده، فقط مولفه های تغییر مکانی در روابط غیر خطی کرنش حفظ شده اند. با استفاده از روابط (۲)، کرنش ها بصورت جملاتی از تغییر مکان ها و دوران های مرکز ثقل تقویت کننده قابل بیان می باشند.

### تقریبات فوریه

برای شرایط تکیه گاهی ساده، سری های فوریه دوگانه تغییر مکان ها و دوران های پوسته بصورت زیر می باشد [۹]:

$$\begin{aligned} U(x, \theta) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N U_{mn} \cos(\alpha_m x) \cos(n\theta) \\ V(x, \theta) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N V_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(n\theta) \\ W(x, \theta) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N W_{mn} \sin(\alpha_m x) \cos(n\theta) \end{aligned}$$

داخلی پوسته و تقویت کننده، کار مجازی ناشی از بارهای وارده و کار مجازی نیروهای اندرکنشی بدست می آید. معادلات غیر خطی بدست آمده با کمک روش نیوتن-رافسون حل می گردد [۱۰]. کار مجازی داخلی پوسته استوانه ای برابر است با:

$$\delta W_{int}^{sh} = \iiint_V [\sigma_x \delta e_x + \sigma_\theta \delta e_\theta + \sigma_{x\theta} \delta e_{x\theta} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{\theta z} \delta \gamma_{\theta z}] dV \quad (16)$$

همچنین کار مجازی داخلی سخت کننده (ring) از رابطه زیر بدست می آید.

$$\delta W_{int}^r = \iiint_V [\sigma_\theta \delta e_\theta + \sigma_{x\theta} \delta \gamma_{x\theta} + \sigma_{z\theta} \delta \gamma_{z\theta}] dV \quad (17)$$

کار مجازی خارجی ناشی از فشار محوری و فشار جانبی مرده (radial) بصورت زیر می باشد:

$$\delta W_{ext}^{sh} = -P \int_0^{2\pi} [\delta U(1, \theta) - \delta U(0, \theta)] R d\theta - q^D \int_S \delta W dS \quad (18)$$

که در آن P نیروی محوری فشاری بر واحد طول محیط استوانه و  $q^D$  فشار شعاعی خارجی می باشد. برای فشار هیدرواستاتیک (حالتی که تمام استوانه تحت فشار ثابت خارجی قرار دارد)، P به  $q^D$  مرتبط بوده  $(P = Rq^D / 2)$ . در حالت فشار خارجی زنده که وابسته به تغییر مکان است [۱۱]، جمله دوم رابطه (۱۸) بصورت زیر اصلاح می شود:

$$-q^L \int_S [\delta W + \frac{1}{R} (V \delta V + W \delta W) + \delta W (\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta}) + W (\frac{\partial \delta U}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta V}{\partial \theta})] dS \quad (19)$$

کار مجازی نیروهای اندرکنشی بین پوسته و تقویت کننده با توجه به روابط پیوستگی (۱۵) برابر است با:

$$\delta W_\lambda = \frac{1}{2} \sum_1^{2\pi} \int_0^\circ \delta [\lambda_{\theta r1} g_{\theta r1} + \lambda_{x r1} g_{x r1} + \lambda_{z r1} g_{z r1} + \Lambda_{z r1} G_{z r1} + \Lambda_{\theta r1} G_{\theta r1}] (R - \frac{h}{2}) d\theta \quad (20)$$

و در نهایت کار مجازی کل سیستم بصورت خطی شده خواهد شد:

نشان داده شده اند. این نیروها و لنگرها در واقع برآیند تنش های موجود در سطح تماس پوسته و تقویت می باشند و تقریبات فوریه آنها نیز به فرم زیر بیان می گردد:

$$\lambda_{xr}(\theta) = \sum_{n=1}^N \lambda_{xm} \cos(n\theta)$$

$$\lambda_{\theta r}(\theta) = \sum_{n=1}^N \lambda_{\theta m} \sin(n\theta)$$

$$\lambda_{zr}(\theta) = \sum_{n=0}^N \lambda_{zm} \cos(n\theta)$$

$$\Lambda_{\theta r}(\theta) = \sum_{n=0}^N \Lambda_{\theta m} \cos(n\theta)$$

$$\Lambda_{zr}(\theta) = \sum_{n=1}^N \Lambda_{zm} \sin(n\theta) \quad (14)$$

در این روابط  $\Lambda_{zm}$ ،  $\Lambda_{\theta m}$ ،  $\lambda_{xm}$ ،  $\lambda_{\theta m}$ ،  $\lambda_{xm}$  ضرایب نامعین می باشند. پیوستگی تغییر مکان ها در سطح تماس لازم می دارد:

$$g_{x r1} = U(x_1, \theta) - \frac{h}{2} \phi_x(x_1, \theta) - [U_{r1}(\theta) + e_{r1} \phi_{\theta r1}(\theta)] = 0$$

$$g_{\theta r1} = V(x_1, \theta) - \frac{h}{2} \phi_\theta(x_1, \theta) - [V_{r1}(\theta) + e_{r1} \phi_{x r1}(\theta) - \omega_{o1} \tau_{r1}(\theta)] = 0$$

$$g_{z r1} = W(x_1, \theta) - W_{r1}(\theta) = 0$$

$$G_{\theta r1} = \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=x_1} + \phi_{\theta r1}(\theta) = 0$$

$$G_{z r1} = \left[ \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=x_1} - \frac{h}{2} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x} \Big|_{x=x_1} \right] - [\phi_{z r1}(\theta) - \omega_{11} \tau_{r1}(\theta)] = 0 \quad (15)$$

زیرنویس ۱ بیانگر ۱ امین سخت کننده بوده و  $\omega_{01}$  و  $\omega_{11}$  ضرایب تابیدگی تابع  $\omega(x, \theta)$  مربوط به بالی است که در تماس با جدار پوسته است. همچنین  $e_{r1}$  فاصله میان مرکز ثقل حلقه ۱ ام تا سطح تماس می باشد. تغییرات  $\theta$  بدلیل بسته بودن پوسته و تقویت کننده در محدوده  $[0, 2\pi]$  است.

## تحلیل غیر خطی

معادلات تعادل کل سیستم از ترکیب کار مجازی

$$D(\delta W_{int}^{sh} + \delta W_{int}^r + \delta W_{\lambda} - \delta W_{ext}^{sh}) = 0 \quad (21)$$

رابطه (۲۱) برای تحلیل غیر خطی رابطه اساسی بوده و با کمک ترکیب روش های نیوتن-رافسون و طول قوس [۱۲] قابل حل می باشد.

## تحلیل عددی

بر مبنای تحلیل توصیف شده برنامه کامپیوتری ایجاد شده است و نتایج این برنامه برای مثال های متنوع که شامل تحلیل غیر خطی هندسی پوسته های تقویت شده در راستای محیطی تحت اثر بارهای ترکیبی فشار محوری و فشار جانبی (مرده و زنده) بوده، ارائه می شود. سه پوسته تقویت شده، تولید شده از مصالح ایزوتروپ و ارتوتروپ مورد بررسی قرار می گیرند. دو تا از این پوسته ها توسط محققان دیگر مورد بررسی قرار گرفته اند [۵،۱۳] و بنابراین می توانند مبنای کنترل نتایج تحقیق حاضر باشند. سومین پوسته تقویت شده به گونه ای طراحی شده تا بتوان فشار کمانشی و منحنی های پس از کمانش را برای ترکیب های مختلف لایه بندی مقایسه کرد.

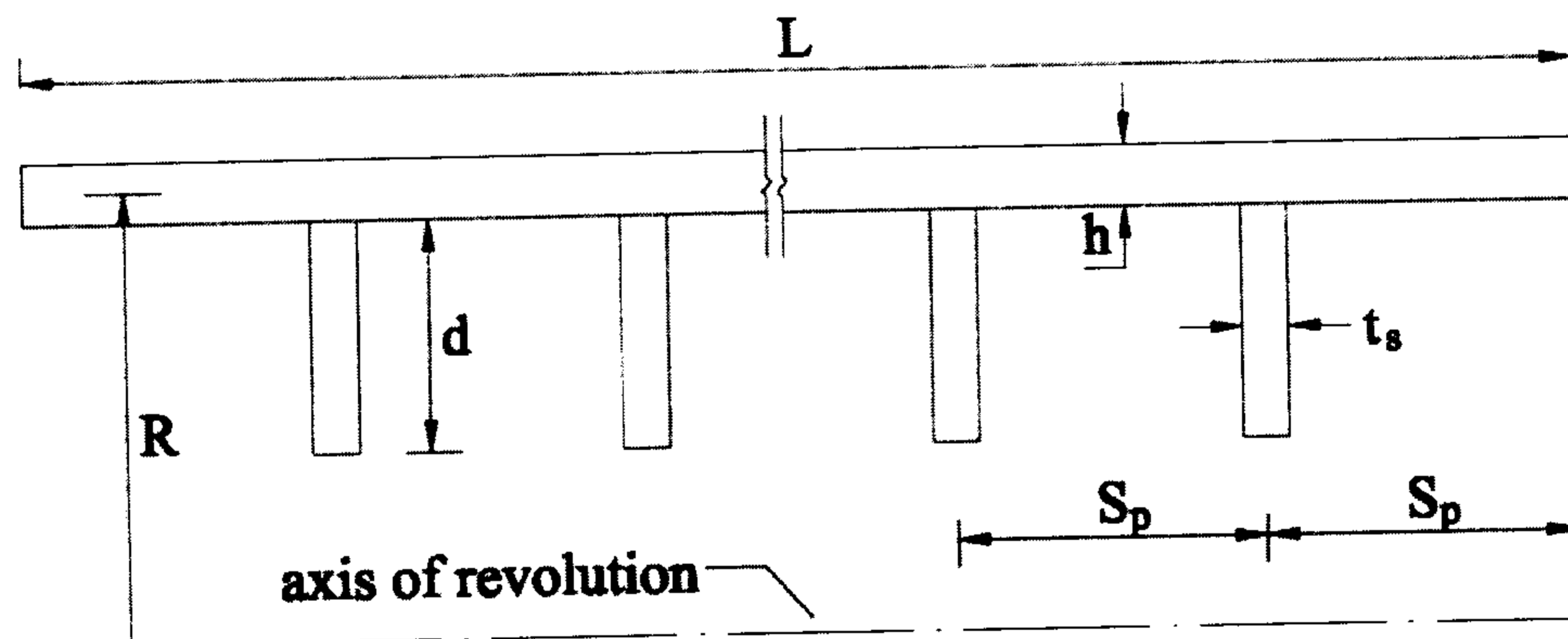
## پوسته ایزوتروپ تقویت شده

استوانه مورد نظر ایزوتروپ بوده و با ۶ حلقه تقویت شده است. شکل (۴) مقطع طولی از استوانه را نشان می دهد. مشخصات هندسی بشرح زیر می باشد:

$$L=60.452\text{mm} , R=101.31\text{mm} , h=0.5842\text{mm},$$

$$\text{تعداد حلقه ها} = N_s = 6 , t_s = 0.3318\text{mm} \text{ و}$$

$S_p = 8.636\text{mm}$ . مشخصات مصالح نیز عبارتند از:  $E=71705.5\text{ Mpa}$  و  $\nu=0.3$ . پوسته تحت اثر فشار هیدرواستاتیک با راستای شعاعی (فشار مرده) قرار دارد. جدول (۱) بار کمانش بدست آمده توسط مدل ها و المان های مختلف را نشان می دهد. تحلیل حاضر بر پایه تئوری های غیر خطی پوسته ساندرز و دائل استوار می باشد. برای همه حالات کمانش با ۷ موج در راستای محیطی رخ می دهد ( $n_{cr} = 7$ ). در تحلیل حاضر ضریب نقص اولیه بسیار کوچک فرض می گردد تا تاثیری بر فشار بحرانی بدست آمده نداشته باشد ( $\max(\dot{W}/h) = 10^{-8}$ ). جدول (۱) نشان می دهد که تحلیل غیر خطی هندسی حاضر که با بکارگیری ۵۵ هارمونیک غیر صفر در راستای طولی بدست آمده قابل مقایسه با نتایج بدست آمده توسط تحلیل های دو شاخگی<sup>۱۳</sup> خطی و غیر خطی می باشد. بار بحرانی بدست آمده توسط تئوری های دائل و ساندرز تفاوت محسوسی نمی کنند و دلیل عمده آن کم عمق بودن<sup>۱۴</sup> پوسته مورد مطالعه می باشد. اختلاف در نتایج تحقیق حاضر و سایر نتایج عمدتاً ناشی از بکارگیری المان های مختلف برای مدل کردن تقویت کننده (المان تیر در تحلیل جاری و المان پوسته در سایر موارد) و متفاوت بودن نحوه اتصال و پیوستگی تقویت کننده به جدار پوسته می باشد. در مدل های LIN2D و NONLIN2D اتصال فقط در یک نقطه و در سطح میانی پوسته وجود دارد (برای یک مقطع طولی پوسته)، در صورتیکه در مدل تحقیق حاضر اتصال تقویت کننده در سطح داخلی پوسته و تماس در یک خط وجود دارد.



شکل ۴: مقطع طولی پوسته تقویت شده.

جدول ۱: مقایسه نتایج کمانش موضعی پوسته ایزوتروپ تقویت شده (Moradi-Parson Cylinder)<sup>a</sup>.

Analysis program	Linear bifurcation <sup>c</sup>	Non-Linear <sup>c</sup> bifurcation	Geometrical <sup>c</sup> Non-Linear
ABAQUS(C3D20) <sup>b</sup>	2.117	1.889	-
LIN2D <sup>b</sup>	2.075	-	-
NONLIN2D <sup>b</sup>	-	1.827	-
Current analysis (Donnell)	-	-	1.970
Current analysis (Sanders)	-	-	1.985

<sup>a</sup> Moradi & Parsons (1991)

<sup>b</sup> Sridharan & Alberts (1997)

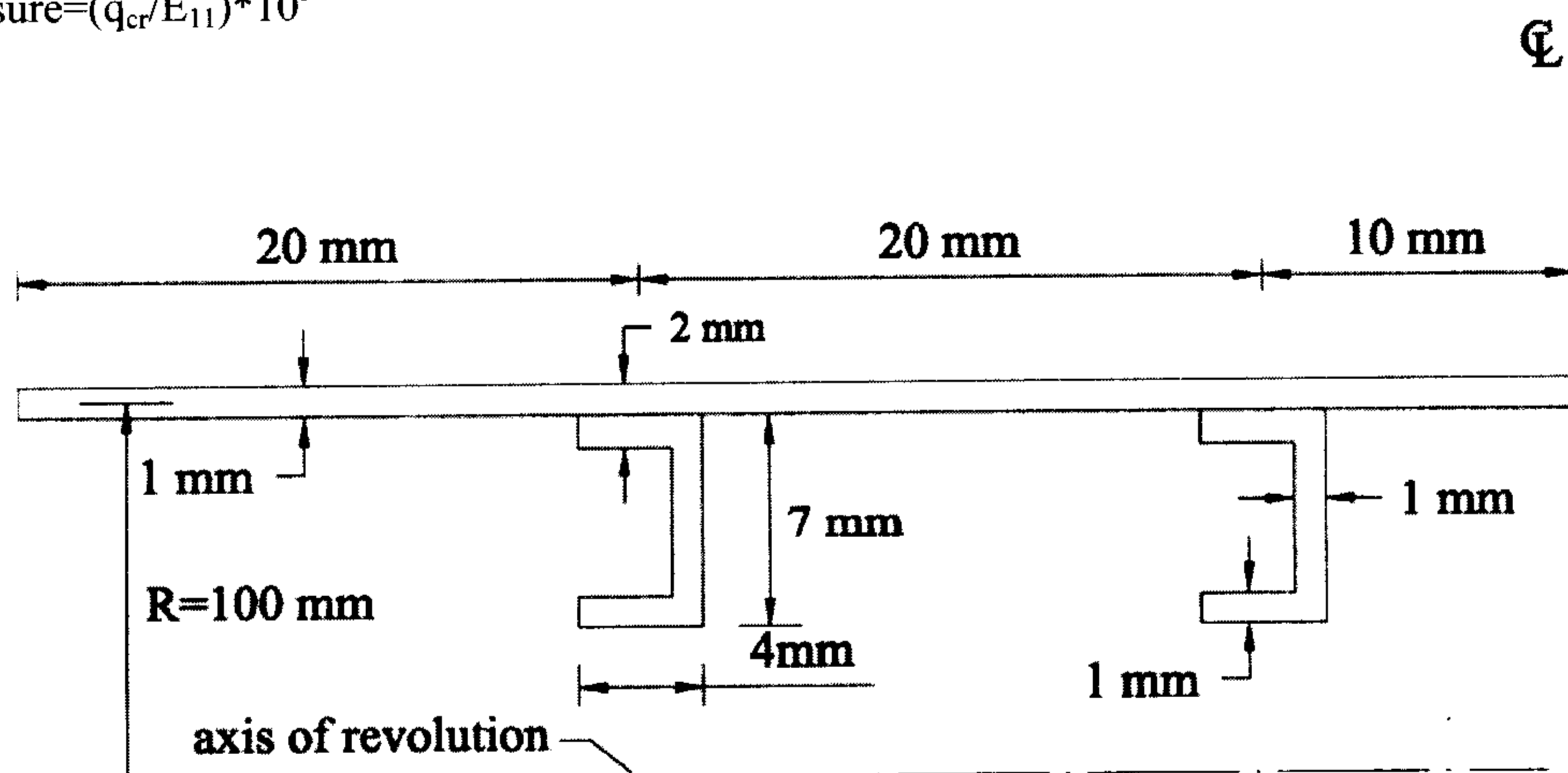
<sup>c</sup> Buckling pressure (Mpa)

جدول ۲: مقایسه نتایج کمانش کلی پوسته ارتوتروپ تقویت شده.

Analysis program	Dead pressure (n <sub>cr=3</sub> ) <sup>b</sup>	Live pressure (n <sub>cr=3</sub> ) <sup>b</sup>
NONLIN2D <sup>a</sup>	2.2687	2.0975
LIN2D <sup>a</sup>	2.2530	2.0626
INSTACC <sup>a</sup>	2.1016	1.9470
Current analysis (Donnell)	2.0430	1.9920
Current analysis (Sanders)	2.3287	2.2165

<sup>a</sup> Sridharan & Alberts (1997)

<sup>b</sup> Pressure=(q<sub>cr</sub>/E<sub>11</sub>)\*10<sup>5</sup>



شکل ۵: هند سه پوسته و تقویت کننده ها.

$$E_{11} = 110316 \text{ MPa}, E_{22} / E_{11} = 0.0925,$$

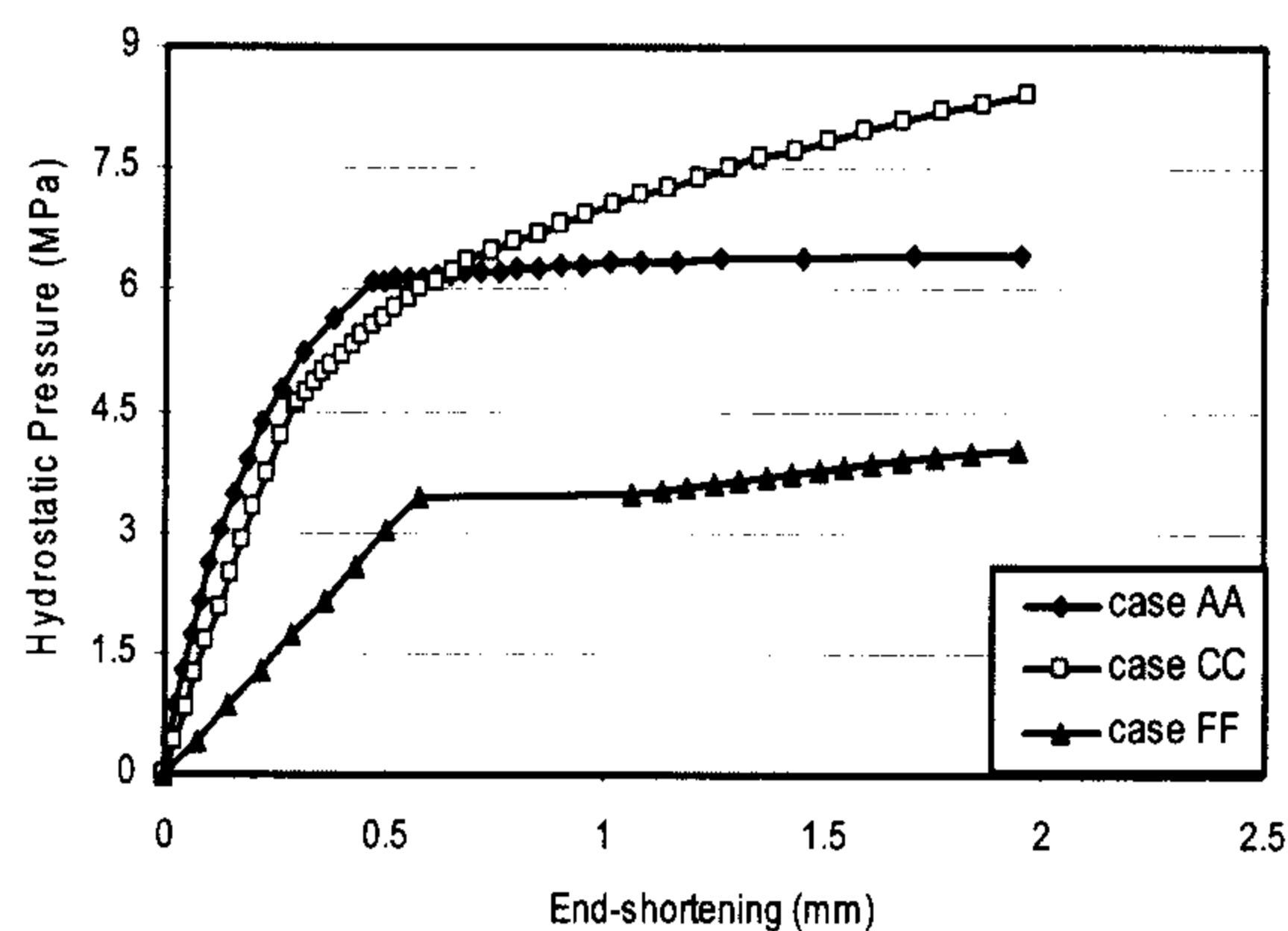
$$G_{12} / E_{11} = G_{13} / E_{11} = 0.0475 \text{ و } \nu_{12} = 0.33.$$

تحلیل حاضر هم فشار مرده<sup>۱۶</sup> و هم فشار زنده<sup>۱۷</sup> را در نظر می گیرد. در این مسئله، نتایج مربوط به تئوری های ساندرز و دانل برای بار مرده و بار زنده اختلاف قابل ملاحظه ای دارند. علت عمده این اختلاف حاکم بودن مد کمانشی کلی<sup>۱۸</sup> با  $n_{cr} = 3$  بوده که خود ناشی از هندسه و مشخصات پوسته و تقویت کننده ها می باشد. نتایج

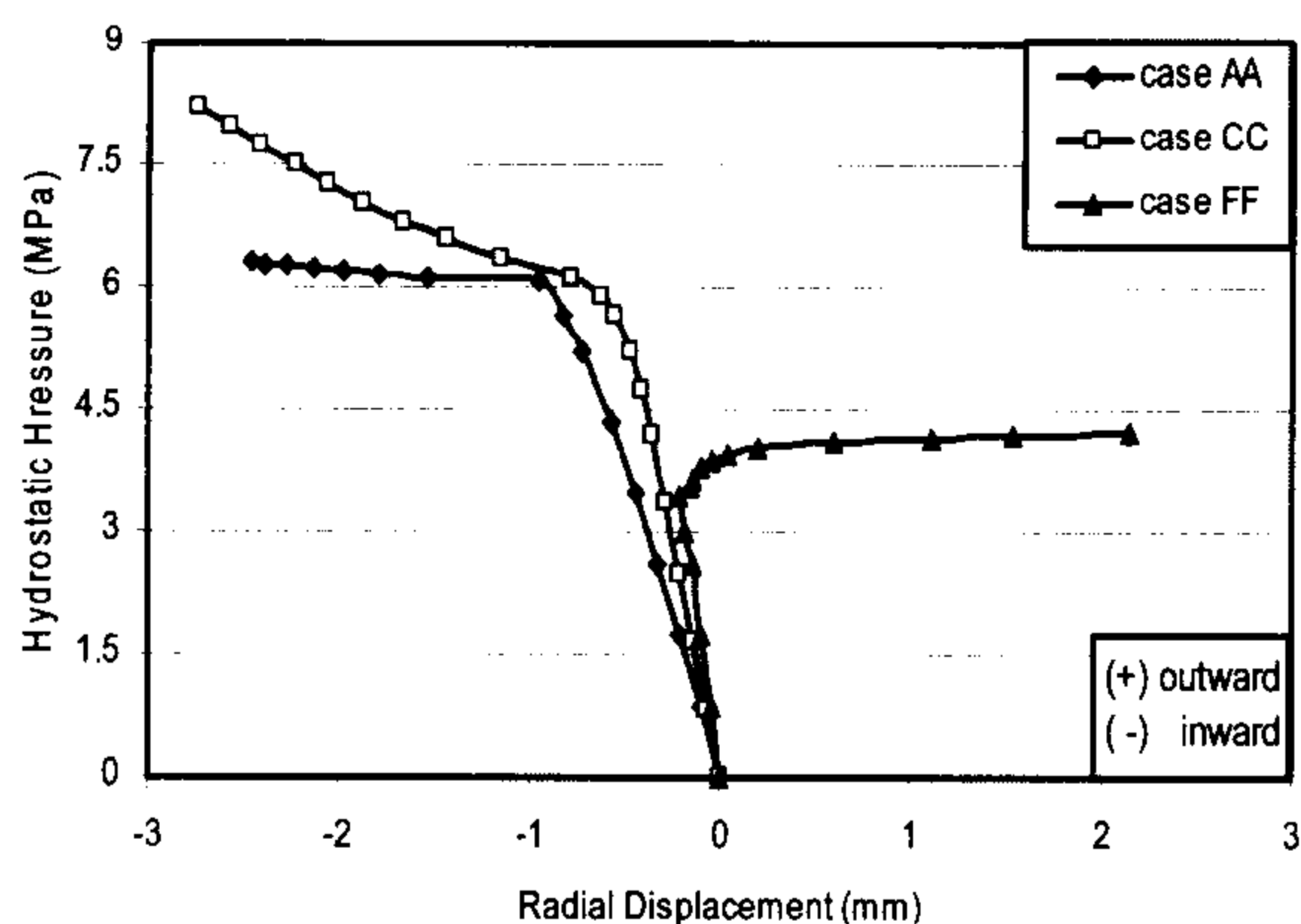
### پوسته ارتوتروپ تقویت شده

این استوانه متشکل از ۲۰ واحد لامینه<sup>۱۵</sup> [90/0] می باشد. تقویت کننده ها با فواصل مساوی قرار گرفته اند و نسبت به محور  $(x=L/2)$  متقارن می باشند. هندسه پوسته تقویت شده با توجه به شکل (۴) بصورت زیر تعریف می شود:  $N_s = 10$ ،  $R/h = 100$ ،  $L/h = 262$ ،  $S_p/h = 232$ ،  $t_s/h = 2$  و  $d/h = 5.422$ . مشخصات مصالح از این قرارند:

کوتاه شدگی یکنواخت انتهایی و تغییر مکان شعاعی در  $(x=L/2)$ ، در مقابل فشار هیدرواستاتیک برای سه حالت AA، CC و FF در دیاگرام های (۶) و (۷) رسم شده اند. این دیاگرامها نشان میدهند که سختی پس از کمایش را می توان با تغییر لایه بندی افزایش داد.



شکل ۶: منحنی بار-کوتاه شدگی انتهایی برای لایه بندی های مختلف پوسته و تقویت کننده.



شکل ۷: تأثیر لایه بندی های مختلف روی تغییر مکان شعاعی پوسته.

برای مثال حالت CC از لحاظ شیب منحنی بار \_ تغییر شکل دارای پایداری بیشتری می باشد، بطور مشابه، شکل های (۸) و (۹) تغییرات نیروهای اندرکنشی  $\lambda_{ZF}$  و  $\lambda_{\theta F}$  در  $(x=20\text{mm})$  در مقابل فشار هیدرواستاتیک را نشان می دهند. اگرچه، نیروی اندرکنشی شعاعی،  $\lambda_{ZF}$ ، با شروع بارگذاری مقدار غیر صفر داشته ولی نیروی اندرکنشی محیطی فقط در محدوده پس از کمایش مقدار غیر صفر خواهد شد. بطور مشابه، تغییرات  $\lambda_{\theta F}$  در مقابل فشار هیدرواستاتیک نشان می دهد که پاسخ پس از کمایش در حالت CC پایداری بیشتری نسبت به ۲ حالت دیگر (FF, AA) دارد. تغییرات  $\lambda_{ZF}$  از فشار به کشش در

بدست آمده مربوط به تقریب زدن مولفه های تغییر مکانی و دورانی پوسته با ۴۶ هارمونیک غیر صفر در راستای طولی می باشد. نتایج این تحلیل و تحلیل مربوط به مدل های LIN2D (مدل ۲ بعدی پوسته تقویت شده به همراه تحلیل خطی مقدار ویژه) و NONLIN2D (مدل ۲ بعدی و تحلیل غیر خطی مقدار ویژه)، در جدول (۲) مشخص می باشند. در این حالت نیز همانند پوسته ایزوتروپ، مدل های متفاوت تقویت کننده و نحوه اتصال تقویت کننده به جدار پوسته و روش های متفاوت تحلیل (تحلیل غیر خطی هندسی برای تحقیق حاضر و تحلیل های خطی و غیر خطی مقدار ویژه برای سایر موارد)، دلایل اختلاف در نتایج می باشند.

### اثر لایه بندی های متفاوت بر پایداری پوسته

در این حالت، چهار تقویت کننده حلقوی با مقطع ناودانی با فواصل مساوی قرار دارند. هندسه سخت کننده در شکل (۵) نشان داده شده است و مشخصات مصالح بصورت زیر میباشند:

$$E_{11} = 155000 \text{ Mpa}$$

$$G_{13} = G_{23} = 4400 \text{ Mpa}, E_{22} = 12100 \text{ Mpa}$$

$$t_{ply} = 0.125 \text{ mm} \text{ و } \nu_{12} = 0.248, G_{23} = 3200 \text{ Mpa}$$

جدول (۳)، شش لایه بندی متفاوت از A تا F را برای پوسته و تقویت کننده نشان می دهد. ترکیب این لایه بندی ها برای پوسته و حلقه ها حالات متنوعی را تولید می کند که در جدول (۴) نشان داده شده اند. برای مثال، حالت AB بیانگر پوسته با لایه بندی A و تقویت کننده با لایه بندی B می باشد. فشار هیدرواستاتیک بحرانی و عدد موج مربوط به آن،  $n_{cr}$ ، برای ۲۴ حالت مورد بحث (۱۸ حالت برای پوسته تقویت شده و ۶ حالت پوسته بدون تقویت) در جدول (۴) مشخص می باشند. علیرغم اینکه پوسته بدون تقویت با الیاف در راستای محور طولی، حالت A، در بین سایر لایه بندی ها، A تا F، کمترین بار کمایش را دارد ولی برای پوسته تقویت شده حداکثر فشار کمایشی مربوط به حالت AA می باشد که بیانگر پوسته با راستای الیاف طولی و حلقه با راستای الیاف محیطی می باشد. نتایج نشان می دهند که لایه بندی پوسته تأثیر بیشتری در مورد کمایش و عدد موج مربوطه،  $n_{cr}$ ، نسبت به لایه بندی حلقه دارد. تغییرات



جدول ۳: آرایش های متفاوت لایه های پوسته و تقویت کننده.

Case	A	B	C	D	E	F
Lay-up	(0) <sub>8</sub>	(90) <sub>8</sub>	(0/90/0/90) <sub>S</sub>	(30/-30/30/-30) <sub>2T</sub>	(45/-45/45/-45) <sub>2T</sub>	(60/-60/60/-60) <sub>2T</sub>

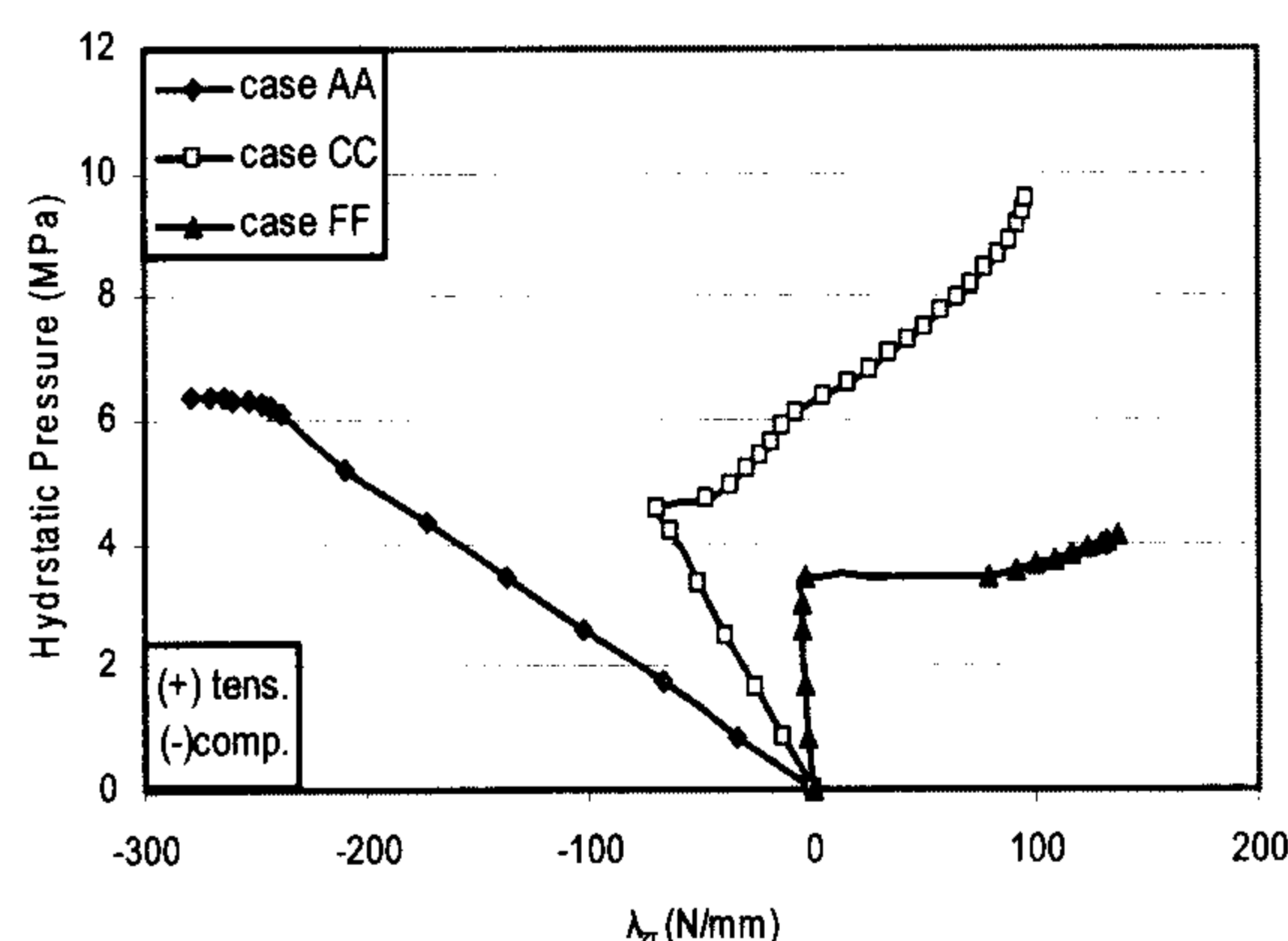
جدول ۴: تأثیر لایه بندی های مختلف روی بار کمانش پوسته تقویت شده.

Case	$q_{cr}$ (Mpa)	$n_{cr}$	Case	$q_{cr}$ (Mpa)	$n_{cr}$	Case	$q_{cr}$ (Mpa)	$n_{cr}$	Case	$q_{cr}$ (Mpa)	$n_{cr}$
AA	5.837	4	BA	1.675	10	CD	4.430	18	A	0.149	9
AB	2.143	4	BB	1.696	10	CE	4.256	19	B	0.553	6
AC	4.824	4	BC	1.680	10	CF	4.083	19	C	0.368	7
AD	5.503	3	CA	4.505	18	DD	4.175	20	D	0.334	10
AE	4.262	3	CB	3.933	19	EE	3.099	15	E	0.477	8
AF	2.933	4	CC	4.339	19	FF	3.375	11	F	0.570	7

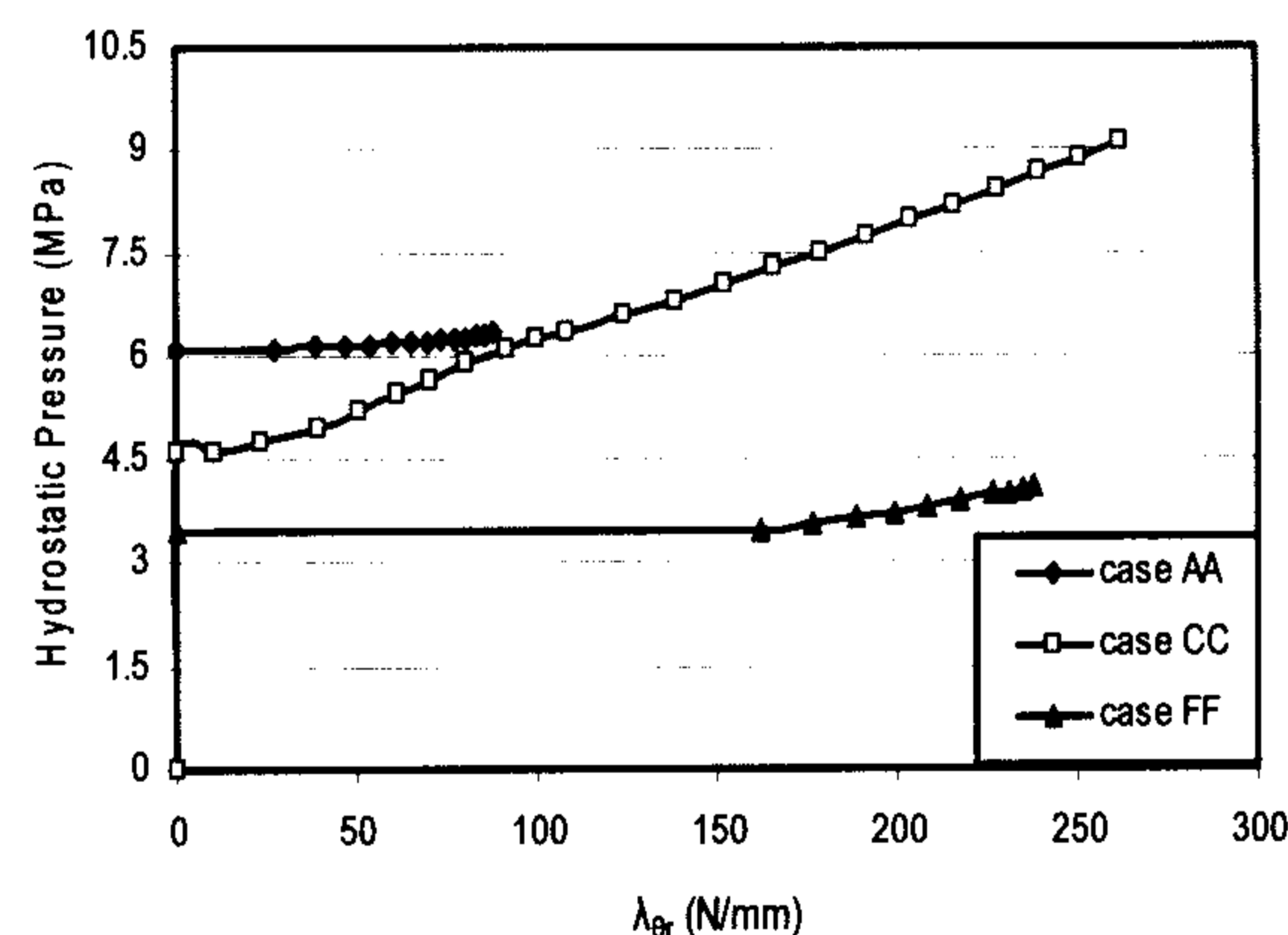
### نتیجه گیری

در این مقاله فشار بحرانی هیدرواستاتیک به فرم مرده (شعاعی) و زنده (وابسته به تغییر شکل) توسط روش تحلیل غیر خطی هندسی برای پوسته تقویت شده محاسبه می شود. نتایج این تحقیق با نتایج تحلیل های مقدار ویژه خطی و غیر خطی مقایسه شده و با توجه به تفاوت هایی در مدل سازی تقویت کننده ها و نحوه اتصال تقویت کننده به جدار پوسته، تطابق خوبی دارند. مقایسه نتایج تحلیل ها بر اساس تئوری های غیر خطی ساندرز و دائل نشان می دهند که برای پوسته های غیر کم عمق<sup>۱۹</sup> و در حالت کمانش کلی با عدد موج ( $n_{cr}$ ) کوچک، اختلاف ها تقویت می شوند. علیرغم اینکه تئوری ساندرز بار کمانش بزرگتری نسبت به تئوری دائل می دهد ولی نتیجه تئوری ساندرز قابل اعتمادتر بوده، چون در فرمولاسیون دائل ساده سازیهای بیشتری نسبت به تئوری ساندرز صورت گرفته است. با مقایسه تاثیر لایه بندی های متفاوت روی پاسخ پوسته تقویت شده کامپوزیتی، نقش این لایه بندی ها در رفتار پس از کمانش مشخص گردیده و بنابراین برای داشتن پوسته تقویت شده اقتصادی می بایست رفتار پس از کمانش بنحوی در طراحی این پوسته ها مد نظر قرار گیرد. عامل دیگری که می تواند در پاسخ پس از کمانش نقش عمده ای داشته باشد توزیع تقویت کننده ها در طول استوانه می باشد که می تواند مبنای تحقیق بعدی قرار گیرد.

حالت CC با توجه به مشارکت سهم های متقارن محوری و غیر متقارن محوری در نیروی  $\lambda_{ZT}$  قابل توجهی می باشد.



شکل ۸: تأثیر لایه بندی های مختلف روی نیروی اندرکنش شعاعی.



شکل ۹: نیروی اندرکنش محیطی برای لایه بندی های متفاوت پوسته و تقویت کننده.

## مراجع

- 1 - Sridharan, S., Zeggane, M. and Stranes, J. Jr. (1992). "Post buckling response of stiffened composite cylindrical shells." *AIAA Journal*, Vol. 30, No.12, PP. 2897-2905.
- 2 - Dawe, D. J. and Wang, S. (2000). "Post buckling analysis of composite laminated panels." *AIAA Journal*, Vol. 38, No.11, PP. 2160-2170.
- 3 - Arbocz, J. and Hol, J. M. A. M. (1994). "On the reliability of buckling load predictions." *AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 35<sup>th</sup> Structure, Structural Dynamics, and Material Conference* (Hilton Head, SC), AIAA, Washington, DC, PP. 514-521.
- 4 - Ley, R. P., Johnson, E. R. and Gurdal, Z. (1994). "Buckling of imperfect, anisotropic, ring-stiffened cylinders under combined loads." *AIAA Journal*, Vol. 32, No. 6, PP. 1302-1309.
- 5 - Sridharan, S. and Alberts, J. (1997). "Numerical modeling of ring-stiffened cylinders." *AIAA Journal*, Vol. 35, No.1, PP. 187-195.
- 6 - Rastogi, N. (1995). "Load transfer in the stiffener-to-skin joints of a pressurized fuselage." *Doctoral dissertation*, Department of Aerospace and Ocean Engineering. Virginia Polytechnic Institute and State University. Blacksburg. Virginia.
- 7 - Jones, R. M. (1975). *Mechanics of composite material*. Hemisphere, Washington, D. C.
- 8 - Brush, D. O. and Almorh, B. O. (1975). *Buckling of bars, plates and shells*. McGraw-Hill, New York.
- 9 - Rao, K. M. and Piening, H. R. M. (1986). "Critical shear loading of curved sandwich panels faced with fiber-reinforced plastic." *AIAA Journal*, Vol. 24, No.9, PP. 1531-1536.
- 10 - Bonet, J. and Wood, R. D. (1997). *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, U.K.
- 11 - Schweizerhof, K. and Ramm, E. (1984). "Displacement dependent pressure load in nonlinear finite element analysis." *Computers and Structures*, Vol. 18, No.6, PP. 1099-1114.
- 12 - Crisfield, M. A. (1991). *Non-Linear Finite Element Analysis of Solid and Structures*. Vol. 1, John Wiley, Chichester, Sussex.
- 13 - Moradi, B. and Parsons, I. O. (1991). "A comparison of modeling techniques for the buckling of stiffened shells." *ASCE Engineering Mechanics Specialty Conference*, (Columbus, OH), American Society of Civil Engineers, New York, PP. 856-860.

## واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1 - Sanders	2 - FOSD	3 - Ring	4 - Ritz
5 - Arc-Length	6 - Lay-Up	7 - Finite Strip	8 - Imperfection
9 - Beam Element	10 - Tangent Stiffness Matrix	11 - Transformed Reduced Stiffness	
12 - Donnell	13 - Bifurcation	14- Shallowness	15 -Laminate
16 - Radial	17 - Fluid	18 - Overall	19-Non-Shallow Shell