نشریه دانشکده فنی، جلد ۳۶، شماره ۴، اسفندماه ۱۳۸۱، از صفحه ۴۹۵ تا ۵۰۴

محاسبه همبستگی شبکه G_n^m ، شبکه ای با ماکسیمم همبندی

دارا معظمی

دانشیار گروه علوم پایه مهندسی – دانشکده فنی – دانشگاه تهران

مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات سازمان انرژی اتمی ایران

(تاریخ دریافت ۸۰/۱۰/۳ ، تاریخ تصویب ۸۱/۷/۲۰)

چکیده

برای هر عدد صحیح ثابت m و n ، $m \geq n+1$ ، رده ای از گرافهای G_n^m را در نظر می گیریم، که آنها با تعداد یالهای مینیمم، n-همبند باشند. گرافهای G_n^m مثالهای خوبی برای شبکه هایی با ماکسیمم همبندی هستند. این خاصیت آنها را برای طراحان شبکه مفید می سازد و از این رو جالب است که پارامترهای پایداری شبکه ها را روی این گرافها مطالعه کنیم. در این مقاله با استفاده از پارامتر همبستگی به محاسبه شبکه G_n^m در حالتی می پردازیم که m زوج و n فرد باشد.

واژه های کلیدی: همبندی، همبستگی

مقدمه

شبکه ها را می توان به وسیله یک گراف G، با مجموعه راسی $V(G)$ و مجموعه یالی $E(G)$ ، نمایش داد. یک شبکه ارتباطی ترکیبی از راسها و یالهای ارتباطی است. داشتن شبکه ای با ماکسیمم همبندی و طراحی آن خود از اهمیت ویژه ای برخوردار است. وقتی شبکه ای شروع به از دست دادن یالها می کند موثر بودن خود را از دست می دهد. طبیعتاً لازم است به ترتیب مناسبی تعمیر شود. داشتن پارامتری که اطلاعات لازم را در اختیار بگذارد و به سوالات زیر پاسخ دهد، برای طراحان شبکه بسیار مهم است : چند راس یا چند ایستگاه هنوز در ارتباط اند؟ و یا مشکلات وصل مجدد این شبکه آسیب دیده تا چه اندازه است؟

تعریفها

گراف G یک سه تایی مرتب $(V(G), E(G), \psi_G)$ ، متشکل از مجموعه ناتهی $V(G)$ ی راسها، مجموعه $E(G)$ ی یالها، مجزا از $V(G)$ و تابع وقوع ψ_G است که با هر یال G یک جفت نامرتب (نه لزوماً مجزا) از راسهای G را همراه می کند. اگر e یک یال و u و v راسهایی باشند، به قسمی که $\psi_G(e) = uv$ ، آن گاه می گویند e ، u را به v وصل می کند؛ راسهای u و v، را دو انتهای e می نامند. مجموعه ای از راسها در G مستقل است اگر هیچ دو راسی از آنها مجاور نباشند. بیشترین تعداد راسها در چنین مجموعه ای را عدد استقلال راسی G می نامند و به وسیله $\alpha(G)$ یا α نمایش می دهند. گراف ساده ای را که در آن هر جفت از راسهای متمایز به وسیله یک یال به هم متصل باشند، گراف کامل می نامند. گراف کامل n راسی را با K_n نشان می دهند. زیر مجموعه ای از $V(G)$ را مجموعه برشی نامند اگر حذف آنها G را ناهمبند کند، و زیر مجموعه ای $E(G)$ را یک مجموعه برشی یالی نامند اگر حذف آنها G را ناهمند کند.

همبستگی، یک پارامتر جدید برای گرافهاست و اولین بار در مقاله [۲] معرفی شد و سپس در مقاله های [۹،۸،۷،۶] تعمیم داده شد. رده های بسیاری از گرافها وجود دارند که نشان می دهند پارامتر همبستگی مناسبترین اندازه گیر پایداری در شبکه هاست [۵]. این پارامتر قادر است بین گرافهایی که دارای پایداریهای مختلف هستند تفاوت قائل شود. همبستگی یک گراف G یعنی $T(G)$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$T(G) = \min\left\{\frac{|A| + \tau(G-A)}{\omega(G-A)}\right\}$$

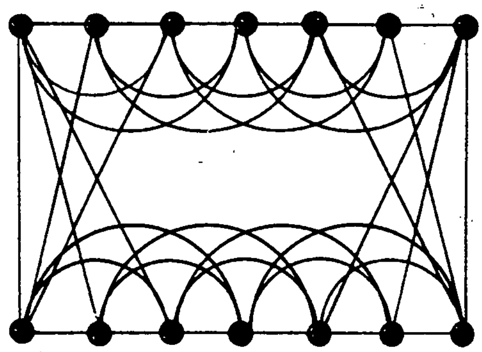
که در آن منیمم نسبت به همه راسهای مجموعه برشی A از G اختیار می شود. G-A را گراف القا شده به وسیله راسهای V-A و $\tau(G-A)$ را تعداد راسها در بزرگترین مولفه گراف القا شده به وسیله G-A تعریف می کنیم. $\omega(G-A)$ تعداد مولفه های G-A است. گراف همبند G را T − همبسته نامند اگر به ازای هر زیر مجموعه A از راسهای G با $\omega(G-A)>1$ رابطه $|A|+\tau(G-A)\ge T\omega(G-A)$ برقرار باشد. اگر G کامل نباشد، آنگاه بزرگترین T موجود است به طوری که G ، T-همبسته است. این T، همبستگی G است. به سخنی دیگر، گراف کامل شامل مجموعه برش راسی نیست ولذا به ازای هر T، T-همبسته است. به طور متناظر، تعریف می کنیم $T(K_p)=\infty$ به ازای هر p، $(p\ge 1)$. مجموعه $A\subseteq V(G)$ را T− مجموعه G نامند اگر

$$T(G)=\left\{\frac{|A|+\tau(G-A)}{\omega(G-A)}\right\}$$

در بخش فوق سعی شده همه تعاریف مورد نیاز برای مطالعه این مقاله آورده شود، با وجود این و در صورت نیاز خواننده می تواند به کتابهای اصلی نظریه گراف و از آن جمله کتاب نظریه گراف با کاربردهای آن اثر باندی و مورتی [۳] که به تازگی به وسیله دکتر دارا معظمی ترجمه شده و توسط مرکز نشر دانشگاهی به چاپ رسیده است، مراجعه کند.

محاسبه همبستگی شبکه G_n^m

راسهای گراف G_n^m را با $m-1,\dots,2,1,0$ نشان گذاری می کنیم. ابتدا فرض کنید n زوج بوده ، n=2r ، و دو راس i و j گراف G_{2r}^m مجاور باشند. دو راس i و j مجاورند اگر $i-r\le j\le i+r$ (که در آن جمع به پیمانه m در نظر گرفته شده است). حال فرض کنید n فرد، n>1 و m زوج باشد. گیریم n= 2r+1 ، (r>0) . در این صورت G_{2r+1}^m را به ترتیب زیر می سازیم: ابتدا G_{2r}^m را می سازیم و سپس یالهایی را که راس i را به راس $i+\frac{m}{2}$ برای $1\le i\le\frac{m}{2}$ وصل می کند، رسم می کنیم. G_7^{14} را در شکل (۱) نشان داده ایم.



شکل ۱ : گراف G_7^{14} .

قضیه زیر را هراری در [۳] ثابت کرد.

قضیه ۱ : گراف G_n^m ، n-همبند است.

هراری در مقاله اش نشان داد که بنا به قضیه ۱ همبندی این گراف ماکسیمم است. پس گراف انتخاب شده G_{2r+1}^m شبکه ای با همبندی ماکسیمم است.

در این مقاله n را برابر 2r یا n = 2r+1 و $m=k(r+1)+s$ برای $0\le s<r+1$ در نظر می گیریم. لذا می توانیم نشان دهیم که

$$k=\left\lfloor\frac{m}{r+1}\right\rfloor,\quad m\equiv s \mod(r+1)$$

همچنین فرض می کنیم که گراف G_n^m کامل نیست، $n+1<m$. در مقاله [۵] همبستگی گراف G_{2r}^m را با استفاده از قضیه ۲ محاسبه کردیم. در این مقاله علاقه مند به یافتن همبستگی G_{2r+1}^m، شکل (۱) که به مراتب مشکل تر است، هستیم.

قضیه ۲ : $T(G_{2r}^m)=r+\dfrac{1+\left\lfloor\frac{s}{k}\right\rfloor}{k}$

فرع ۱ : فرض کنید $G_n=(v_1v_2\dots v_n)$ یک n- دور باشد. در این صورت

$$T(G_n)=\begin{cases}1+\dfrac{2}{n} & n\equiv 0 \pmod 2\\[2mm] 1+\dfrac{4}{n-1} & n\equiv 1 \pmod 2\end{cases}$$

برهان: اگر $n\equiv 0 \pmod 2$ ، آنگاه r=1 ، s=0 ، $k=\frac{n}{2}$. لذا با استفاده از قضیه ۲، داریم $T(G_n)=1+\frac{2}{n}$.

اگر $n \equiv 1 \pmod 2$، آن گاه $s=1$ ، $k = \frac{n-1}{2}$ ، $r=1$. پس $T(G_n) = 1 + \frac{4}{n-1}$.

لم ۱ : گیریم G_n^m با m زوج و n فرد باشد، $n=2r+1$. در این صورت $m \not\equiv 0 \mod(n+1)$ اگر و تنها اگر $s=0$ و k زوج باشد.

لم ۲ : گیریم G_n^m با m زوج، $n=2r$، برای n زوج و $n=2r+1$ برای n فرد باشد، آن گاه

$$\alpha(G_n^m) = \begin{cases} k & m \not\equiv 0 \mod(n+1) \\ k-1 & m \equiv 0 \mod(m+1) \end{cases}$$

قضیه ۳ : گیریم G_n^m با m زوج و n فرد، $n=2r+1$ ، باشد. در این صورت

$$r + \frac{(1+\lceil \frac{s}{k} \rceil)}{k} \le T(G_n^m) \le$$

$$\begin{cases} r + \frac{s+1}{k} & m \not\equiv 0 \mod(n+1) \\ \frac{kr+s+2}{k-1} & m \equiv 0 \mod(n+1 \end{cases}$$

برهان : گیریم $H = G_n^m$. در [۲] ثابت کردیم که $T(H) \le \frac{m-\alpha(H)+1}{\alpha(H)}$. لذا با استفاده از لم ۲ ، اگر $m \equiv 0 \mod(n+1)$ ، آن گاه

$$T(H) \le \frac{m-k+1}{k} = \frac{k(r+1)+s-k+1}{k}$$

$$= r + \frac{s+1}{k}$$

و اگر $m \equiv 0 \mod(n+1)$ ، آن گاه :

$$T(H) \le \frac{m-(k-1)+1}{k-1} = \frac{kr+s+2}{k-1}$$

چون $V(G_{2r}^m) = V(H)$ و $E(G_{2r}^m) \subseteq E(H)$ ، آن گاه G_{2r}^m زیر گراف فراگیر G است. در [۲] داشتیم $T(G_{2r}^m) \le T(H)$. لذا به وسیله قضیه ۱ داریم :

$$r + \frac{(1+\lceil \frac{s}{k} \rceil)}{k} \le T(G_n^m)$$

اکنون آماده ایم که همبستگی این گراف را محاسبه کنیم.

لم ۳ : گیریم G_n^m با m زوج، $n = 2r+1$ ، $r \ge 3$ ، $0<s<r+1$ ، $s<k$ و k فرد باشد. در این صورت یک برش راسی A با kr عنصر وجود دارد به طوری که تعداد مولفه ها، $\omega(G_n^m) = k$ ، و بزرگترین مولفه $\tau(G_n^m) = 2$ هستند.

برهان : فرض کنیم راسهای G_n^m به وسیله $0,1,2,\dots,m-1$ نشان گذاری شده است. گیریم $s<k$ ، در این صورت $s = k - \ell$. لذا $m = s(r+2) + \ell(r+1)$.
چون k فرد است، پس $k = 2q + \ell$.

حالت اول : r زوج است. لذا s فرد و ℓ زوج است. بنابراین $s = k-1 \ge 1$ و $\ell = 2t$. از اینرو : $k - \ell = 2q+1-2t \ge 1$ ، $q \ge t$. مجموعه های زیر را انتخاب کنید.

$$\omega_0 = \{m-1, 0\}$$

$$D = \{1,2,\dots,\frac{m}{2} - \frac{r}{2} - 1\} = \{1,2,\dots,qr+2q-t\}$$

$$F = \{\frac{m}{2} + \frac{r}{2},\dots,m-2\} =$$

$$\{\frac{m}{2} + \frac{r}{2},\dots,\frac{m}{2} + \frac{r}{2} + qr + 2q - t - 1\}$$

از اینرو $|D|=|F|$. مجموعه برشی زیر را در نظر می گیریم.

$$A = C \cup \{\frac{m}{2} - \frac{r}{2},\dots,\frac{m}{2} + \frac{r}{2} - 1\} \cup Y$$

به طوری که C اجتماع مجموعه های زیر است.

$$\{1,2,\dots,r\}, \{r+2,\dots,2r+1\},\dots,\{(t-1)r+t,\dots,tr+t-1\},$$
$$\{tr+t+1,\dots,(t+1)r+t\}, \{(t+1)r+t+3,\dots,$$
$$(t+2)r+t+2\},\dots,\{(q-1)r+2q-t-1,\dots,qr+2q-t-2\}$$

که در آن $Y = Y_1 \cup Y_2$ و

$$Y_1 = \cup\{\{\frac{m}{2} + \frac{r}{2} + (c-1)r + c,\dots,$$
$$\frac{m}{2} + \frac{r}{2} + cr + c - 1\} \mid 1 \le c \le t\},$$

$$Y_2 = \cup\{\{\frac{m}{2} + \frac{r}{2} + (f-1)r + 2f - t,\dots,$$
$$\frac{m}{2} + \frac{r}{2} + fr + 2f - t - 1\} \mid t+1 \le f \le q\};$$

پس C یک زیر مجموعه D و Y یک زیر مجموعه F است.
اکنون $W = D - C$ را در نظر می گیریم. لذا W اجتماع مجموعه های زیر است :

$$\{r+1\}, \{2r+2\},\dots,\{tr+1\}, \{(t+1)r+t+1,$$
$$(t+1)r+t+2\}, \{(t+2)r+t+3, (t+2)r+t+4\},\dots,$$
$$\{qr+2q-t-1, qr+2q-t\}$$

W اجتماع t مولفه با ۱ عنصر و q-t مولفه با ۲ عنصر است. مجموعه های تک عنصری به صورت $\{Lr+L\}$ هستند که در آن $1 \le L \le t$. مجموعه های دو عنصری به صورت $\{dr+2d-t-1, dr+2d-t\}$ هستند که در آن $t+1 \le d \le q$. می خواهیم ثابت کنیم که اگر $x \in W$ آن گاه $x + \frac{m}{2} \in Y$. اگر x در یک مجموعه تک عنصری باشد، آن گاه x به صورت $x = Lr+L$ است که در آن $1 \le L \le t$. از اینرو :

$x + \frac{m}{2} = [\frac{m}{2} + r + (L-1)r + L] \in Y_1$ ، زیرا $r \ge 3$.

اگر x اولین عنصر مجموعه دو عنصری باشد، آن گاه x به صورت $x = dr + 2d - t - 1$ است که در آن $t+1 \le d \le q$. از اینرو :

$x + \frac{m}{2} = [\frac{m}{2} + r + (d-1)r + 2d - t - 1] \in Y_2$.

عنصرهای مولفه ω_0 برابر m-1 و 0 هستند. چون $r \ge 3$ ، آن گاه $0 + \frac{m}{2}$ و $m - 1 - \frac{m}{2} = \frac{m}{2} - 1$ در مجموعه $\{\frac{m}{2} - \frac{r}{2}, \ldots, \frac{m}{2} + \frac{r}{2} - 1\}$ هستند. از اینرو عنصرها در مولفه ω_0 دارای عنصرهای مجاور در مجموعه برشی A هستند. تعداد عنصرهای مجموعه برشی A برابر است با rk و $\tau(G_n^m - A) = 2$ و $\omega(G_n^m - A) = k$.

حالت دوم : r فرد است. لذا s زوج و ℓ فرد است. از اینرو $s = 2h$. مجموعه های زیر را انتخاب کنید.

$\omega_0 = \{0\}$

$D = \{1, 2, \ldots, \frac{m}{2} - \frac{r+1}{2}\} = \{1, 2, \ldots, qr + q + h\}$

$F = \{\frac{m}{2} + \frac{r+1}{2}, \ldots, m-1\} =$

$\{\frac{m}{2} + \frac{r-1}{2} + 1, \ldots, \frac{m}{2} + \frac{r-1}{2} + qr + q + h\}$

از اینرو $|D|=|F|$. زیر مجموعه های زیر را در نظربگیرید.

$$A = C \cup \{\frac{m}{2} + \frac{r-1}{2}, \ldots, \frac{m}{2}, \ldots, \frac{m}{2} + \frac{r-1}{2} - 1\} \cup A$$

به طوری که C اجتماع مجموعه های زیر باشد.

$\{1, 2, \ldots, r\}, \{r+3, \ldots, 2r+2\}, \ldots, \{hr+2h+1, \ldots, (h+1)r+2h\},$
$\{(h+1)r+2h+2, \ldots, (h+2)r+2h+1\}, \ldots, \{(q-1)$
$r+q+h, \ldots, qr+q+h-1\}$

و $Y = Y_1 \cup Y_2$ که در آن

$Y_1 = \cup\{\{\frac{m}{2} + \frac{r-1}{2} + (g-1)r + 2g + 1, \ldots,$
$\frac{m}{2} + \frac{r-1}{2} + gr + 2g\} \mid 1 \le g \le h\},$

$Y_2 = \cup\{\{\frac{m}{2} + \frac{r-1}{2} + (b-1)r + b + h + 1, \ldots,$
$\frac{m}{2} + \frac{r-1}{2} + br + b + h\} \mid h+1 \le b \le q\},$

لذا C زیر مجموعه D و Y یک زیر مجموعه F است. اکنون فرض کنید $W = D\text{-}C$. از اینرو W اجتماع مجموعه های زیر است :

$\{r+1, r+2\}, \ldots, \{hr+2h-1, hr+2h\}$
$\{h+1)r+2h+1\}, \ldots, \{qr+q+h\}$

W اجتماع h مولفه با ۲ عنصر و q-h مولفه با ۱ عنصر است. مجموعه های دو عنصری به صورت $\{er+2e-1, er+2e\}$ است که در آن $\{1 \le e \le h\}$. مجموعه های تک عنصری به صورت $\{jr+j+h\}$ هستند که در آن $h+1 \le j \le q$. می خواهیم ثابت کنیم که اگر $x \in W$ آن گاه $x + \frac{m}{2} \in Y$. اگر x اولین عنصر مجموعه دو عنصری باشد، آنگاه x بصورت $x = er + 2e - 1$ است که در آن $1 \le e \le h$. از اینرو :

$x + \frac{m}{2} = [\frac{m}{2} + \frac{r-1}{2} + (e-1)r + 2e + \frac{r+1}{2}] \in Y_1$ ، زیرا $r \ge 3$. به طور مشابه ، $x + 1 + \frac{m}{2}$ هم در Y_1 است.

اگر x در یک مجموعه تک عنصری باشد، آن گاه x به صورت $x = Jr + J + h$ است که در آن $h+1 \le J \le q$. از اینرو $x + \frac{m}{2} = [\frac{m}{2} - \frac{r-1}{2} + (J-1)r + J + \frac{r+1}{2}] \in Y_2$. زیرا $r \ge 3$. عنصر مولفه ω_0 برابر 0 است. چون $0 + \frac{m}{2} \in \{\frac{m}{2} - \frac{r-1}{2}, \ldots, \frac{m}{2}, \ldots, \frac{m}{2} + \frac{r-1}{2}\}$ آن گاه عنصر مولفه ω_0 دارای عنصر مجاور در مجموعه برشی A است. بنابراین تعداد عنصرها در مجموعه برشی A برابر است با rk و $\tau(G_n^m - A) = 2$ و $\omega(G_n^m - A) = k$.

با استفاده از این نتایج ، قضیه زیر را مطرح می کنیم.

قضیه ۴: گیریم G_n^m گراف مفروض با $n=2r+1$، $r\ge 3$، m زوج، k فرد، $0<s<r+1$ و $s<k$ باشد. در این صورت $T(G_n^m)=r+\frac{2}{k}$.

برهان: به وسیله قضیه ۲ داریم $r+\frac{1+\left\lceil \frac{s}{k}\right\rceil}{k}\le T(G_n^m)$.

از اینرو اگر $s<k$، آن گاه $r+\frac{2}{k}\le T(G_n^m)$. در لم ۳، A مجموعه برشی G_n^m با kr عنصر است. بزرگترین مولفه G_n^m دارای ۲ عنصر است و تعداد k مولفه موجود است. بنابراین همبستگی با استفاده از مجموعه A مقدار کران پایین را اختیار می کند، یعنی $T(G_n^m)=\frac{kr+2}{k}=r+\frac{3}{k}$.

اکنون حالتی را در نظر می گیریم که m مضربی از k باشد.

لم ۴: گیریم G_n^m با مجموعه راسی $V=\{0,1,2,\dots,m-1\}$، $n=2r+1$، m زوج، $0<s<r+1$، و $s=ak$ باشد، آن گاه:

$$A=\cup\{\{ba+(b-1)r+b,\ ba+(b-1)r+b+1,\dots,\ ba+br+b-1\}\mid 1\le b\le k\}$$

مجموعه برشی G_n^m با kr عنصر است اگر و تنها اگر k فرد باشد.

برهان: مجموعه A اجتماع مجموعه های زیر است:

$$\{a+1,a+2,\dots,a+r\},\{2a+r+2,\dots,2a+2r+1\},\dots,\{ka+(k-1)r+k,\dots,ka+kr+k-1\}$$

بنابراین $W=G_n^m-A$ اجتماع مجموعه های

$$\{0,1,\dots,a\},\{a+r+1,\dots,2a+r+1\},\dots,\{(k-1)a+(k-1)r+k-1,\dots,ka+(k-1)r+k-1\}$$

هریک با $a+1$ عنصر است. می توانیم نشان دهیم که اگر x هر عنصر مجموعه W باشد، آن گاه $x+\frac{m}{2}$ یک عنصر مجموعه A است. از اینرو W مجموعه مولفه های G_n^m-A است.

اگر x در W باشد، آن گاه x به صورت:

$x=pa+pr+p+c$ است که در آن $0\le p\le k-1$ و $c\le a$. چون $m=k(r+1)$ و $s=ak$، $m=k(r+1+a)$.

حالت ۱: k فرد است، $k=2q+1$، $k>1$.

از اینرو:

$$m=(2q+1)(r+1+a)=2q(r+1+a)+r+1+a$$

چون m زوج است، آن گاه:

$\frac{m}{2}=q(r+1+a)+\frac{r+1+a}{2}$، عدد صحیح است.

بنابراین

$$x+\frac{m}{2}=pa+pr+p+c+qr+q+qa+\frac{r+1+a}{2}$$
$$=(p+q)a+(p+q)r+p+q+c+\frac{r+1+a}{2}$$
$$=(p+q+1)a+(p+q)r+p+q+1+c-a-1+\frac{r+1+a}{2}$$

که در مجموعه برشی A است، به شرطی که

$$0\le c-a-1+\frac{r+1+a}{2}\le r-1$$

به طور هم ارزی $0\le 2c-a-1+r\le 2r-2$، یا: $0\le 2c-a-1+r\le 2r-2$، یا:
$1-r\le 2c-a\le r-1$.

چون $c\le a$ و $s=ak<r$، داریم $2c\le 2a=a+a$ یا $2c-a\le a<r$. بنابراین $2c-a\le r-1$. همچنین، $r+2c\ge ak+2c>a+1$، پس $2c-a\ge 1-r$. لذا:

$1-r\le 2c-a\le r-1$ و $(x+\frac{m}{2})\in A$

بنابراین ثابت کردیم که هر عنصر مجموعه W، دارای یک عنصر مجاور در مجموعه برشی A است. از اینرو $|A|=rk$، $\tau(G_n^m-A)=a+1$ و $\omega(G_n^m-A)=k$.

حالت ۲: k زوج است، $k=2q$.

از اینرو $m=2q(r+1)+s=2q(r+1+a)$

و $\frac{m}{2}=q(r+1+a)$.

لذا $x+\frac{m}{2}=(p+q)a+(p+q)r+(p+q)+c$.

چون $c\le a$، $x+\frac{m}{2}$ مولفه دیگری است، لذا در مولفه

W ، A یک مجموعه برشی نیست. بنابراین A مجموعه برشی G_n^m با kr عنصر است اگر و تنها اگر k فرد باشد.

قضیه ۵: اگر G_n^m با $n = 2r+1$ ، m زوج ، $0<s<r+1$ ، k فرد و $s = ak$ باشد، در این صورت :

$$T(G_n^m) = r + \frac{1+a}{k}$$

برهان: به وسیله قضیه ۳ داریم $r+\frac{1+a}{k} \le T(G_n^m)$. مجموعه A از لم ۴ این کران پایین را به دست می دهد، زیرا $|A|=kr$, $\tau(G_n^m)=a+1$ و $\omega(G_n^m - A)=k$. از این رو :

$$\frac{|A|+\tau(G_n^m-A)}{\omega(G_n^m-A)} = \frac{kr+a+1}{k} = r+\frac{1+a}{k}$$

بنابراین وقتی s مضربی از k و k فرد باشد، آن گاه $T(G_n^m)=r+\frac{1+a}{k}$.

اکنون حالتهایی را در نظر می گیریم که $s>k$ باشد.

لم ۵: گیریم G_n^m با $n=2r+1$ ، m زوج ، $0<s<r+1$، k فرد و $s>k$. بنویسید $s = ak+b$ ، برای $0<b<k$.

حالت ۱: اگر r زوج باشد آن گاه

اگر a فرد باشد ، $r \ge 6$ و

اگر a زوج باشد ، $r \ge 8$.

حالت ۲: اگر r فرد باشد آن گاه

اگر a فرد باشد ، $r \ge 5$ و

اگر a زوج باشد ، $r \ge 9$.

برهان: حالت ۱: گیریم $s = ak+b$ برای a ی و b ی باشد. چون r زوج است، آن گاه s فرد است.

i) a فرد باشد، آن گاه b فرد است. لذا مقدار مینیمم برای b برابر ۲ است. چون a و k فرد هستند و $b<k$ ، آن گاه مقادیر مینیمم برای k و a به ترتیب برابر ۳ و ۱ هستند. بنابراین مقدار مینیمم برای s برابر $s=1(3)+2=5$. چون r زوج است و $s<r+1$ ، آن گاه $r \ge 6$.

ii) a زوج است. لذا b فرد بوده و مقدار مینیمم برای b برابر ۱ است. چون a زوج و k فرد است و $b<k$ ، آن گاه مقادیر مینیمم برای k و a به ترتیب برابر ۳ و ۲ هستند. بنابراین مقدار مینیمم برای s برابر $s=2(3)+1=7$ است. چون r زوج و $s<r+1$ ، آنگاه $r \ge 8$.

حالت ۲ : r فرد باشد، آن گاه s زوج است.

i) a فرد باشد، از اینرو b فرد است. لذا مقدار مینیمم برای b برابر ۱ است. چون a و k فردند و $b<k$ ، آن گاه مقادیر مینیمم برای k و a به ترتیب برابر ۳ و ۱ هستند. بنابراین مقدار مینیمم برای s برابر $s=1(3)+1=4$. چون r فرد است و $s<r+1$ ، آنگاه $r \ge 5$.

ii) a زوج است. در این صورت b زوج است. لذا مقدار b برابر ۲ است. چون a زوج است و k فرد و $b<k$ ، آن گاه مقادیر مینیمم برای a و k به ترتیب برابر ۲ و ۳ هستند. بنابراین مقدار مینیمم برای s برابر $s=2(3)+2=8$ است. چون r فرد و $s<r+1$ ، آن گاه $r \ge 9$.

لم ۶: گیریم G_n^m با $n=2r+1$ ، m زوج ، $0<s<r+1$ و k فرد باشد. اگر $s = ak+b$ برای $0<b<k$ ، آنگاه $a+1<\frac{r}{2}$.

برهان: حالت ۱ : r زوج است ، پس s فرد است.

i) a زوج است. لذا b فرد است. از اینرو مقدار مینیمم برای b برابر ۱ است. چون $b<k$ و k فرد است، آن گاه مقدار مینیمم برای k برابر ۳ است. لذا $3a+1 \le ak+b = s$. چون a زوج است ، $2a+2<3a+1$. لذا $2a+2<s<r$. بنابراین $a+1<\frac{r}{2}$.

ii) a فرد است. لذا b زوج است. از اینرو مقادیر مینیمم برای b و k به ترتیب برابر ۲ و ۳ هستند. پس $3a+2 \le ak+b=s$. چون $2a+2<3a+2$ ، آن گاه $2a+2<s<r$. بنابراین $a+1<\frac{r}{2}$.

حالت ۲ : r فرد است. در این صورت s زوج است.

i) a زوج است. لذا b زوج است و مقدار مینیمم برای b برابر ۲ است و چون k فرد است و $b<k$ ، آن گاه مقدار مینیمم برای k برابر ۳ است. لذا $3a+2 \le ak+b=s$. چون $2a+2<3a+2$ ، آن گاه $2a+2 \le s<r$. بنابراین $a+1<\frac{r}{2}$.

ii) a فرد است. پس b فرد است و مقدار مینیمم برای b برابر ۱ است. چون k فرد است و $b<k$ ، آن گاه مقدار

مینیمم برای k برابر ۳ است. لذا $3a+1 \le ak+b=s$. چون $2a+2 \le 3a+1 \le ak+b=s<r$ ، آن گاه $a+1<\frac{r}{2}$.

□

اگر m مضربی از k نباشد، در این صورت داریم :

لم ۷ : گیریم G_n^m با $n=2r+1$ ، m زوج، $0<s<r+1$ ، k فرد و $s>k$ ، که در آن $s = ak+b$ باشد. در این صورت یک مجموعه برشی A با kr عنصر وجود دارد به طوریکه تعداد مولفه ها برابر با $\omega(G_n^m - A)=k$ ، و مرتبه بزرگترین مولفه برابر $\tau(G_n^m)=a+2$ است.

برهان : گیریم $s>k$ ، $s=ak+b$ ، برای $0<b<k$. لذا بنویسید $m=kr+(k-b)(a+1)+b(a+2)$. $m=k(r+1)+s$. اگر r زوج باشد، آن گاه s فرد است. اگر a فرد باشد، آن گاه b زوج است. اگر r فرد باشد، آن گاه s زوج است. اگر a زوج باشد، آن گاه b زوج است. لذا اگر r زوج ، a فرد یا اگر r فرد ، a زوج باشند، آن گاه b زوج است. بنابراین $b=2h$. چون k فرد است، $k=2q+1$. از اینرو $k-b=2q+1+2h \ge 1$, $q \ge h$.

مجموعه های زیر را انتخاب کنید :

$\omega_0=\{m-a,...,0\}$

$D=\{1,2,...,\frac{m}{2}-\frac{r}{2}-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\}=$

$\{1,2,...,qr+(q-1)a+q+h+a\}$

$F=\{\frac{m}{2}+\frac{r}{2}-\frac{a}{2}+\frac{1}{2},...,m-a-1\}=$

$\{\frac{m}{2}+\frac{r}{2}-\frac{a}{2}+\frac{1}{2},...,\frac{m}{2}+\frac{r}{2}+(q-\frac{1}{2})(a+1)+$

$qr+h\}$

از اینرو $|D|=|F|$. مجموعه های زیر را در نظر می گیریم:

$A=C\cup\{\frac{m}{2}-\frac{r}{2}-\frac{a}{2}-\frac{1}{2},...,\frac{m}{2},...,\frac{m}{2}+\frac{r}{2}-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\}\cup Y$

به طوری که C اجتماع مجموعه های زیر است :

$\{1,2,...,r\},\{r+a+3,...,2r+a+2\},...,\{(h-1)r+(h-1)a$
$+2h-1,...,hr+(h-1)a+2h-2\},\{hr+ha+$
$2h+1,...,(h+1)r+ha+2h\},...,\{(h+1)r+(h+1)$
$a+2h+2,...,(h+2)r+(h+1)a+2h+1\},...,$
$\{(q-1)r+(q-1)a+q+h,...,qr+(q-1)a+q+h-1\}$

که در آن $Y=Y_1\cup Y_2$ و

$Y_1=\cup\{\{\frac{m}{2}+\frac{r}{2}+(c-\frac{1}{2})(a+1)+(c-1)r+c+1,...,$
$\frac{m}{2}+\frac{r}{2}+(c-\frac{1}{2})(a+1)+cr+c\}\,|\,1\le c\le h\},$

$Y_2=\cup\{\{\frac{m}{2}+\frac{r}{2}+(j-\frac{1}{2})(a+1)+(j-1)r+h+1,...,$
$\frac{m}{2}+\frac{r}{2}+(j-\frac{1}{2})(a+1)+jr+h\}\,|\,h+1\le j\le q\},$

لذا C زیر مجموعه D و مجموعه برشی Y زیر مجموعه F است. اکنون $W = D\text{-}C$ را در نظر بگیرید. پس W اجتماع مجموعه های زیر است :

$\{r+1,...,r+a+2\},\{2r+a+3,...,2r+2a+4\},...,$
$\{hr+(h-1)a+2h-1,...,hr+ha+2h\},\{(h+1)$
$r+ha+2h+1,...,(h+1)r+(h+1)a+2h+1\},...,$
$\{qr+(q-1)a+q+h,...,qr+qa+q+h\}$

W اجتماع h مولفه $a+2$ عنصر و $q\text{-}h$ مولفه با $a+1$ عنصر است. مجموعه هایی با $a+2$ عنصر به صورت زیر هستند :

$\{Lr+(L-1)a+2L-1,...,Lr+La+2L\}$

که در آن $1\le L\le h$.

مجموعه ها با $a+1$ عنصر به صورت زیر هستند :

$\{fr+(f-1)a+f+h,...,fr+fa+f+h\}$

که در آن $h+1\le f\le q$.

می خواهیم ثابت کنیم که اگر $x\in W$ ، آن گاه $x+\frac{m}{2}\in Y$. گیریم $x\in W$. اگر x در مجموعه ای با $a+2$ عنصر باشد، آن گاه x به صورت $x+pr+(p-1)a+2p-1+g$ که در آن $1\le p\le h$ و $g\le a+1$

$$x+\frac{m}{2}=\frac{m}{2}+r+(p-\frac{1}{2})(a+1)+(p-1)r+p+g-\frac{a+1}{2}\in Y_1$$

به شرطی که $\frac{r}{2}+1\le r+g-\frac{a+1}{2}\le\frac{r}{2}+r$ ، به طور هم ارزی $1\le\frac{r}{2}+g-\frac{a+1}{2}\le r$.

به وسیله لم ۵ ، $r\ge 6$ و به وسیله لم ۶ ، $a+1<\frac{r}{2}$ و $g\le a$. در این صورت :

$$\frac{r}{2}+g-\frac{a+1}{2}>\frac{r}{2}+g-\frac{r}{4}=\frac{r}{4}+g>1$$ و

$$\frac{r}{2}+g-\frac{a+1}{2}\le\frac{r}{2}+a+1-\frac{a+1}{2}=\frac{r}{2}+\frac{a+1}{2}<\frac{r}{2}+\frac{r}{4}=\frac{3r}{4}<r$$

اکنون فرض کنید x یک عنصر مجموعه ای با a+1 راس در W باشد. لذا x به صورت :
$x = dr + (d-1)a + d + h + 1$ است که در آن : $h+1 \le d \le q$ و $\ell \le a$. از اینرو :

$$x + \frac{m}{2} = \frac{m}{2} + r + (d - \frac{1}{2})(a+1) + (d-1)r + h + \ell + \frac{a+1}{2} - a \in Y_2$$

به شرطی که

$$\frac{r}{2}+1 \le r+\ell+\frac{a+1}{2}-a \le \frac{r}{2}+r$$

به طور هم ارزی

$$1 \le \frac{r}{2}+\ell+\frac{a+1}{2}-a \le r$$

به وسیله لم ۵، $r \ge 6$ و به وسیله لم ۶، $a+1<\frac{r}{2}$ و $1 \le a$. در این صورت

$$\frac{r}{2}+\ell+\frac{a+1}{2}-a \ge \frac{r}{2}+\ell\frac{a+1}{2}+(1-\frac{r}{2})=\ell+1+\frac{a+1}{2}>1$$

و

$$\frac{r}{2}+\ell+\frac{a+1}{2}-a\le\frac{r}{2}+a+\frac{a+1}{2}-a<\frac{r}{2}+\frac{r}{4}=\frac{3r}{2}<r$$

لذا

$$\frac{r}{2}+\ell\le r+\ell+\frac{a+1}{2}-a\le\frac{r}{2}+r$$

و

$$x+\frac{m}{2}\in Y$$

بنابراین هر عنصر در مولفه مجموعه W دارای یک عنصر مجاور در مجموعه برشی Y است. اکنون مجموعه زیر را در نظر بگیرید :

$$H=\{\frac{m}{2}-\frac{r}{2}-\frac{a}{2}+\frac{1}{2},\dots,\frac{m}{2}\}$$

عنصر 0 در ω_0 دارای یک راس مجاور در H است ، زیرا $0+\frac{m}{2}=\frac{m}{2}\in H$. چون $|\omega_0|=a+1$ و به وسیله لم ۶، $a+1<\frac{r}{2}$ ، آن گاه $|\omega_0|<|H|$. در این صورت عنصرها در مولفه ω_0 دارای عنصر مجاور در H هستند.

$$H\subseteq\{\frac{m}{2}-\frac{r}{2}-\frac{a}{2}+\frac{1}{2},\dots,\frac{m}{2},\dots,\frac{m}{2}+\frac{r}{2}-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\}\in A$$

بنابراین تعداد عنصرهای مجموعه برشی A، برابر است با rk و $\tau(G_n^m - A)=a+2$ و $\omega(G_n^m-A)=k$.
اگر r زوج باشد، آن گاه s فرد است. اگر a زوج باشد، آن گاه b فرد است. از اینرو k-b زوج است. اگر r فرد باشد، آن گاه s زوج است. اگر a فرد باشد، آن گاه b فرد است. از اینرو k-b زوج است. لذا اگر r زوج و a زوج یا اگر r فرد و a فرد باشند، آن گاه k-b زوج است. بنابراین k-b=2t.
مجموعه های زیر را انتخاب کنید :

$$\omega_0=\{m-(a+1),\dots,0\}$$

$$D=\{1,2,\dots,\frac{m}{2}-\frac{r}{2}-\frac{a}{2}-1\}=\{1,2,\dots,qr+qa+2q-t\}$$

$$F=\{\frac{m}{2}+\frac{r}{2}-\frac{a}{2},\dots,m-a-2\}=\{\frac{m}{2}+\frac{r}{2}-\frac{a}{2},\dots,\frac{m}{2}+\frac{r}{2}+qr+(q-\frac{1}{2})a+2q-t-1\}$$

از اینرو $|D|=|F|$. مجموعه برشی زیر را در نظربگیرید :

$$A=C\cup\{\frac{m}{2}-\frac{r}{2}-\frac{a}{2},\dots,\frac{m}{2}+\frac{r}{2}-\frac{a}{2}-1\}\cup Y$$

به طوری که C اجتماع مجموعه های زیر است :

$$\{1,2,\dots,r\},\{r+a+2,\dots,2r+a+1\},\dots,\{tr+ta+t+1,\dots,(t+1)r+ta+t\},\{(t+1)r+(t+1)a+t+3,\dots,(t+2)r+(t+1)a+t+2\},\dots,\{(q-1)r+(q-1)a+2q-t-1,\dots,qr+(q-1)a+2q-t-2\}$$

و $Y=Y_1\cup Y_2$ که در آن

$$Y_1=\cup\{\{\frac{m}{2}+\frac{r}{2}+(u-1)r+(u-\frac{1}{2})a+u,\dots,\frac{m}{2}+\frac{r}{2}+ur+(u-\frac{1}{2})a+u-1\}\,|\,1\le u\le t\},$$

$$Y_2=\cup\{\{\frac{m}{2}+\frac{r}{2}+(v-1)r+(v-\frac{1}{2})a+2v-t,\dots,\frac{m}{2}+\frac{r}{2}+vr+(v-\frac{1}{2})a+2v-t-1\}\,|\,t+1\le v\le q\},$$

لذا C زیر مجموعه D و Y زیر مجموعه F است. اکنون W=D-C را در نظر بگیرید. پس W اجتماع مجموعه های زیر است :

$$\{r+1,\dots,r+a+1\},\{2r+a+2,\dots,2r+2a+2\},\dots,\{tr+(t-1)a+t,\dots,tr+ta+t\},\{(t+1)r+ta+t+1,\dots,(t+1)r+(t+1)a+t+2\},\dots,\{qr+(q-1)a+2q-t-1,\dots,qr+qa+2q-t\}$$

W اجتماع t مولفه با a+1 عنصر و q-t مولفه با a+2 عنصر است. مجموعه های با a+1 عنصر به صورت زیر هستند :

$$\{zr+(z-1)a+z,\dots,zr+za+z\}$$

که در آن $1\le z\le t$

مجموعه های با a+2 عنصر به صورت زیر هستند :

$$\{wr+(w-1)a+2w-t-1,\dots,wr+wa+2w-t\}$$

که در آن $t+1\le w\le q$

می خواهیم ثابت کنیم که اگر $x\in W$ ، آن گاه $x+\frac{m}{2}\in Y$. گیریم $x\in W$. اگر x در مجموعه ای با a+1 عنصر باشد، آن گاه x بصورت زیر است :

$x=pr+(p-1)a+p+g'$ که در آن $1\le p\le t$ و $g'\le a$ از اینرو :

$x+\frac{m}{2}=\frac{m}{2}+r+(p-1)r+(p-\frac{1}{2})a+p+g'-\frac{a}{2}\in Y_1$. به شرطی که $\frac{r}{2}\le r+g'-\frac{a}{2}\le\frac{r}{2}+r-1$ ، به طور هم ارزی $0\le\frac{r}{2}+g'-\frac{a}{2}\le r-1$.

به وسیله لم ۵، $r\ge 5$ و بوسیله لم ۶، $a+1<\frac{r}{2}$ و $g'\le a$. در این صورت :

$$\frac{r}{2}+g'-\frac{a}{2}>\frac{r}{2}+g'+\frac{1}{2}-\frac{r}{4}=\frac{r}{4}+g'+\frac{1}{2}>0$$

و

$$\frac{r}{2}+g'-\frac{a}{2}\le\frac{r}{2}+a-\frac{a}{2}=$$
$$\frac{r}{2}+\frac{a}{2}<\frac{r}{2}+\frac{r}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3r}{4}-\frac{1}{2}<r-1$$

اکنون فرض کنید x یک عنصر مجموعه با a+2 راس در W است. پس x به صورت :

$x=dr+(d-1)a+2d-t-1+\ell'$ است که در آن $t+1\le d\le q$ و $\ell'\le a+1$. از اینرو :

$x+\frac{m}{2}=[\frac{m}{2}+r+(d-1)r+(d-\frac{1}{2})a+2d-t-\frac{a}{2}-1+\ell']\in Y_2$

به شرطی که $\frac{r}{2}\le r+\ell'-\frac{a}{2}-1\le\frac{r}{2}+r-1$ ، به طور هم ارزی $0\le\frac{r}{2}+\ell'-\frac{a}{2}-1\le r-1$. به وسیله لم ۵، $r\ge 5$ و به وسیله لم ۶، $a+1<\frac{r}{2}$ و $\ell'\le a+1$. در این صورت

$$\frac{r}{2}+\ell'-\frac{a}{2}-1>\frac{r}{2}+\ell'+\frac{1}{2}-\frac{r}{4}-1=\frac{r}{4}+\ell'-\frac{1}{2}\ge 0$$

و

$$\frac{r}{2}+\ell'-\frac{a}{2}-1<\frac{r}{2}+a+1-\frac{a}{2}-1=$$
$$\frac{r}{2}+\frac{a}{2}\le\frac{r}{2}+\frac{r}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3r}{4}-\frac{1}{2}<r-1$$

لذا $x+\frac{m}{2}\in Y$. بنابراین هر عنصر در مولفه مجموعه W دارای یک عنصر مجاور در مجموعه برشی Y است.

$$H=\{\frac{m}{2}-\frac{r}{2}-\frac{a}{2},\dots,\frac{m}{2}\}$$

عنصر 0 در ω_0 دارای یک راس مجاور در H است، زیرا $0+\frac{m}{2}=\frac{m}{2}\in H$. چون $|\omega_0|=a+2$ و به وسیله لم ۶، $a+1<\frac{r}{2}$ ، آن گاه:

$$|\omega_0|=a+2\le\frac{r}{2}+\frac{a}{2}+1=|H|$$

لذا عنصرها در مولفه ω_0 دارای عنصر مجاور در H هستند،

$$H\subseteq\{\frac{m}{2}-\frac{r}{2}-\frac{a}{2},\dots,\frac{m}{2},\dots,\frac{m}{2}+\frac{r}{2}-\frac{a}{2}-1\}\in A$$

بنابراین تعداد عنصرهای مجموعه برشی A برابر است با rk و $\tau(G_n^m-A)=a+2$ و $\omega(G_n^m-A)=k$.

اکنون می توانیم به طور دقیق همبستگی گراف G_n^m را تعیین کنیم.

قضیه ۷ : گیریم G_n^m با n=2r+1 ، m زوج ، k فرد ، $0<s<r+1$ و $s>k$ ، که در آن $s=ak+b$ برای a ی و b ی ، آن گاه

$$T(G_n^m)=r+\frac{a+2}{k}$$

برهان : از لم ۷، A مجموعه برشی G_n^m با kr عنصر است. تعداد مولفه ها برابر k است و بزرگترین مولفه G_n^m-A ، دارای تعداد عنصرهای a+2 است. لذا

$$\frac{|A|+\tau(G_n^m-A)}{\omega(G_n^m-A)}=\frac{kr+a+2}{k}=r+\frac{a+2}{k}$$

به وسیله قضیه ۳، داریم $T(G_n^m) \leq r + \frac{1+\left\lceil \frac{s}{k} \right\rceil}{k}$. چون $s=ak+b$ برای $0<b<k$، آن گاه $\left\lceil \frac{s}{k} \right\rceil = a+1$. از اینرو $T(G_n^m) \leq r + \frac{2+a}{k}$. بنابراین $T(G_n^m) = r + \frac{a+2}{k}$.

مراجع

1 – Bundy, J. A. and Murty, U. S. R. (1976). *Graph theory with applications*, The Macmillan Press Ltd.

2 – Cozzens, M. B., Moazzami, D. and Stueckle, S. (1995). "The tenacity of a graph." *Graph Theory, Combinatorics, and Algorithms,* Yousef Alavi and Allen Schwenk eds. Willey, New York, PP. 1111-1122.

3 – Harary, F. (1962). "The maximum connectivity of a graph." *Proc. Nat. Acad. Sci.,* USA, Vol. 48, PP. 1142-1146.

4 – Moazzani, D. (1995). "The NSM of a graph." *Combinatorics Advances*, C. J. Colbourn and E. S. Mahmoodian, eds., Kluwer, PP. 243-250.

5 – Moazzami, D. (1999). "Vulnerability in Graphs – a Comparative Survey." *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, Vol. 30, PP. 23-31.

6 - Moazzani, D. *On the vulnerability parameters of networkks,* submitted.

7 - Moazzani, D. "Stability measure of a graph – a survey." *Utilitas Mathematica 57*, PP. 171-191.

8- Moazzani, D. (2001). "On networks with maximum graphical structure, tenacity T." *J. Combin. Math. Combin. Comput.,* Vol. 39.

9 - Moazzani, D. (1999). "A note on Hamiltonian properties of tenacity." *Proceeding of the International Conference, Paul Erdos and his mathematics,* Budapest, July 4-11, PP. 174-178.