

تحلیل کمانش صفحات دایره ای ارتوتروپ ضخامت متغیر خطی با تکیه گاه مقاوم الاستیک در برابر پیچش

محمد حسن نائی

استادیار گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

اصغر همتی

فارغ التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۲/۷/۱، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۳/۷/۱۱، تاریخ تصویب ۸۳/۹/۷)

چکیده

در این مقاله کمانش صفحات دایره ای ارتوتروپ با ضخامت متغیر تحت تأثیر نیروی فشاری شعاعی یکنواخت تحلیل گردیده است. صفحات دارای تکیه گاه مقاوم الاستیک در برابر پیچش هستند و ضخامت آنها به طور خطی تغییر می نماید حل مسأله با استفاده از روش ریلی - ریتز^۱ بهینه شده انجام شده است. تابع تغییر مکان در نظر گرفته شده در این روش مجموعی از توابع چند جمله ای است که بر اساس تغییر شکل استاتیک صفحات دایره ای ارتوتروپ می باشند و شرایط مرزی را ارضاء می کنند. در این مقاله اثر تغییرات ضخامت، ارتوتروپ بودن ماده و سختی تکیه گاه بر روی ثابت کمانش بررسی شده است.

واژه های کلیدی: کمانش، صفحه دایره ای ضخامت متغیر، ارتوتروپ، تکیه گاه مقاوم الاستیک، روش ریلی - ریتز

بهینه شده

مقدمه

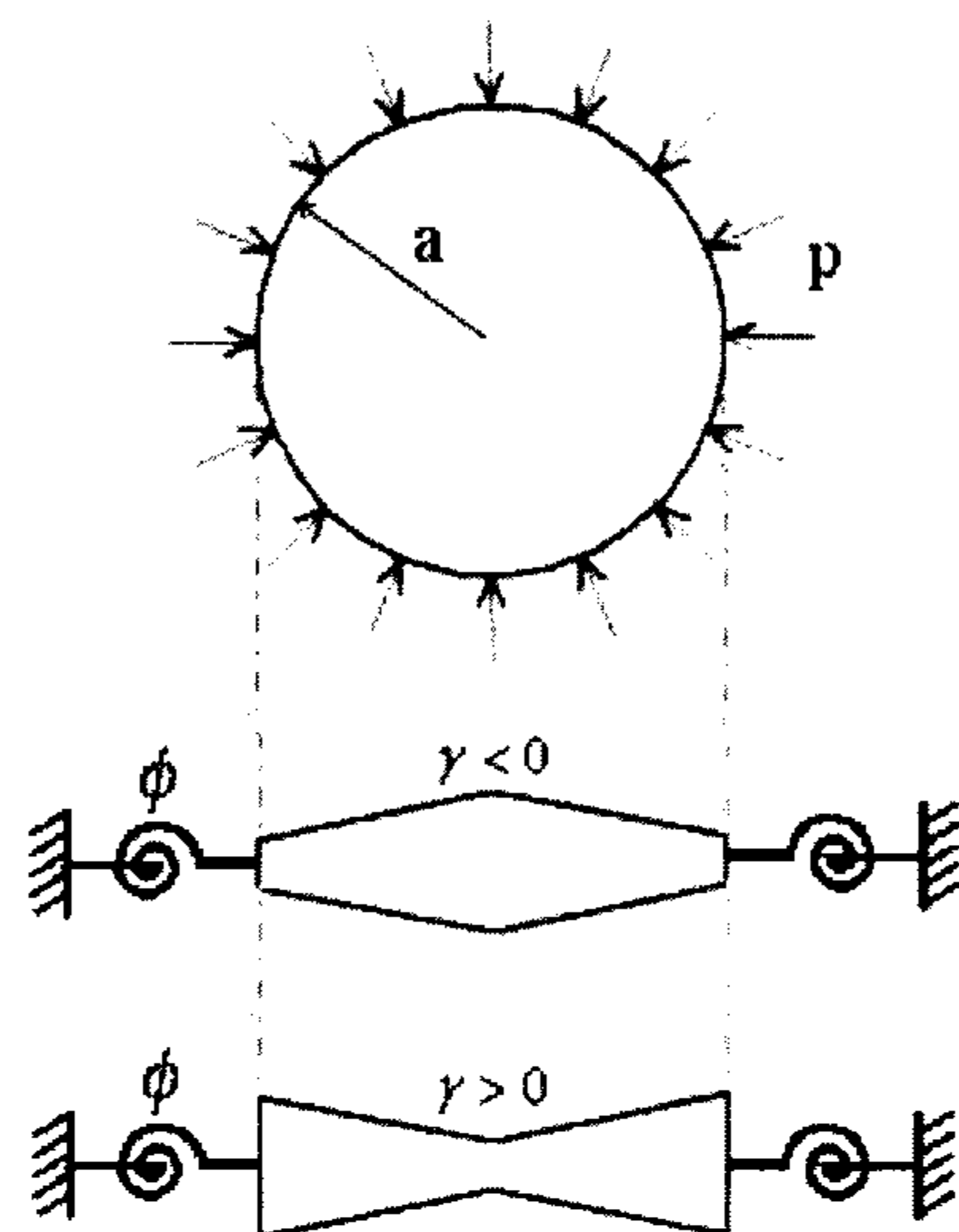
این صفحات لازم می باشد. مسأله پایداری الاستیک صفحات دایره ای ارتوتروپ برای اولین بار توسط Woinosky مورد مطالعه قرار گرفت. وی با استفاده از توابع بسل، نتایج عددی برای کمانش این صفحات ارائه نمود [۳]. سپس Mossakowski تحلیل کاملتری با استفاده از سریها برای کمانش متقارن و غیر متقارن صفحات دایره ای ارائه کرد [۴]. به موازات این کار Pandalay و همکارش حل تحلیلی برای کمانش متقارن این صفحات با استفاده از سریها مطرح کردند [۵]. همچنین Swamidas و همکارانش با استفاده از توابع بسل و لامل^۲ حل تحلیلی برای کمانش متقارن و غیر متقارن صفحات دایره ای ارتوتروپ ارائه نمودند [۱]. کمانش صفحات دایره ای ایزوتروپ ضخامت متغیر در سالهای اخیر مورد بررسی قرار گرفته است [۶] و [۷]. Wang و همکارانش کمانش الاستیک صفحات دایره ای ایزوتروپ با ضخامت متغیر را با استفاده از روش پرتابی^۳ و روش ریلی - ریتز بررسی نموده اند [۶]. Gutierrez و همکارانش، پایداری الاستیک صفحات دایره ای نازک ایزوتروپ با ضخامت متغیر را با استفاده از توابع چند

با پیشرفت سریعی که در دانش علم مواد در طول چند دهه اخیر صورت گرفته است، استفاده از مواد غیر ایزوتروپیک با خواص متنوع در طراحی و ساخت اجزا سازه ها به شدت مورد استفاده قرار گرفته است. یکی از این موارد صفحات دایره ای ارتوتروپ است که کاربرد وسیعی در مهندسی مکانیک، عمران، دریا و هوافضا دارد که از جمله می توان به دیافراگمهای مخازن تحت فشار، صفحات دایره ای تقویت شده توسط تقویت کننده های شعاعی و محیطی، صفحات ساخته شده از مواد کامپوزیتی سرپوش سیلندرها، پیستون و... اشاره کرد [۱]. با استفاده از صفحات دایره ای ضخامت متغیر بجای صفحات ضخامت ثابت، صفحات می توانند مقاومت به مراتب بالاتری در برابر کمانش، خمش و ارتعاشات از خود نشان دهند. از جمله کاربردهای صفحات ضخامت متغیر می توان به لنزهای نوری، ترانسدیوسرهای آکوستیکی و بعضی اجزا مورد استفاده در موشکها اشاره کرد [۲]. با توجه به این که این صفحات در طول عملکرد خود اغلب تحت بارهای فشاری شعاعی قرار می گیرند که ممکن است منجر به ایجاد کمانش در آنها گردد، تحلیل کمانش

دارد عبارتست از:

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta) r dr d\theta dz + \frac{1}{2} a k_\phi \int_0^{2\pi} \left(\frac{dw(a)}{dr} \right)^2 d\theta \quad (1)$$

که در آن k_ϕ سختی فنر پیچشی می باشد.



شکل ۱: صفحه دایره ای با ضخامت متغیر تحت نیروی فشاری شعاعی p بر واحد طول.

با استفاده از روابط تنش- کرنش و کرنش- تغییر مکان در حالت تقارن محوری برای مواد ارتوتروپ می توان رابطه فوق را برای یک صفحه دایره ای با شعاع a و ضخامت $h = h(r)$ به صورت زیر نوشت:

$$U_{\max} = \pi \int_0^a \left[D(r) \left\{ \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right)^2 + \frac{2\nu_\theta}{r} \left(\frac{dw}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right) \right\} + D_\theta(r) \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right] r dr + \frac{1}{2} a k_\phi \int_0^{2\pi} \left(\frac{dw(a)}{dr} \right)^2 d\theta \quad (2)$$

که در آن

$$D_r(r) = \frac{E_r h^3(r)}{12(1-\nu_r \nu_\theta)}, \quad D_\theta(r) = \frac{E_\theta h^3(r)}{12(1-\nu_r \nu_\theta)}$$

$$h(r) = h_0 \left(1 + \gamma \frac{r}{a} \right) \quad (3)$$

همچنین ماکزیمم کار نیروی خارجی چنین صفحه ای که در لبه خود تحت فشار ثابت p قرار دارد عبارتست از:

$$T_{\max} = \pi \int_0^a N_r \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 r dr \quad (4)$$

بطوریکه

جمله ای ارضاء کننده شرایط مرزی و روش ریلی - ریتز مطالعه نموده اند [۷]. در زمینه کمانش صفحات دایره ای ارتوتروپ با ضخامت متغیر به علت پیچیدگی مسأله، مطالعات خیلی محدودی انجام شده است. Rao و همکارانش در مقاله ای اثرات مختلف بر روی پایداری صفحات دایره ای را با استفاده از روش المان محدود بررسی نموده اند [۸]. در این مقاله نتایج محدودی در مورد کمانش صفحات دایره ای ارتوتروپ با ضخامت متغیر ارائه شده است که از این نتایج در مقاله حاضر بعنوان مرجع مقایسه نتایج استفاده گردیده است. همچنین Bhushan و همکارانش کمانش صفحات دایره ای و حلقوی ارتوتروپ با ضخامت متغیر را با استفاده از روش المان محدود بررسی نموده اند. نتایج مطالعه این گروه، محدود به بررسی کمانش صفحات دایره ای ایزوتروپ با ضخامت متغیر، کمانش صفحات حلقوی ارتوتروپ ضخامت متغیر با شرایط مرزی C-C، C-S و لایه های (0/90) می باشد [۹].

در مقاله حاضر با استفاده از روشی نسبتاً ساده، کمانش صفحات دایره ای ارتوتروپ با تکیه گاه مقاوم در برابر پیچش با ضخامت متغیر خطی تحت فشار یکنواخت مورد تحلیل قرار می گیرد (شکل (۱)). در تحلیل این مسأله از روش ریلی- ریتز بهینه شده^۴ استفاده می شود. این روش یکی از روشهایی است که در دو دهه اخیر در حل مسائل کمانش و ارتعاشات صفحات، تیرها و ستونها استفاده شده است [۱۰]. نتایج این روش نسبت به روش ریلی - ریتز که روشی حد بالا است از دقت بالاتری برخوردار است. در این روش از یک پارامتر نمایی برای بهینه کردن روش ریلی- ریتز، در تابع تقریبی در نظر گرفته شده استفاده می شود و مقادیر ویژه حاصل (ثابت کمانش) نسبت به این پارامتر نمایی حداقل می گردد. این روش علاوه بر سادگی نسبی که نسبت به سایر روشها دارد، دارای این مزیت مهم است که کل الگوریتم حل مسأله قابل برنامه نویسی می باشد.

حل مسأله با استفاده از روش ریلی- ریتز بهینه شده

فرم کلی رابطه انرژی کرنشی ماکزیمم برای صفحه دایره ای (شکل (۱)) که تحت اثر نیروهای فشاری قرار

با در نظر گرفتن تابع تغییر مکان $W(R)$ بر حسب مجموعی از توابع چندجمله ای می توان نوشت :

$$W(R) \cong \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(R) \quad (11)$$

که $\psi_i(R)$ با توجه به تغییر شکل استاتیک صفحات دایره ای ارتوتروپ به صورت زیر در نظر گرفته می شود [۱۱]:

$$\psi_i(R) = (a_i R^k + b_i R^{1+\beta} + 1) R^{2(i-1)} \quad (12)$$

ضرایب ثابت a_i و b_i با اعمال شرایط مرزی در توابع $\psi_i(R)$ بدست می آیند و عبارتند از :

$$a_i = -\frac{Q_i - L_i}{S_i - L_i} \quad (13)$$

و

$$b_i = -\frac{S_i - Q_i}{S_i - L_i} \quad (14)$$

که

$$\begin{aligned} S_i &= (k+i-1)[1+g(R)\varphi(-2+i+k+v_\theta)] \\ L_i &= (i+\beta)[1+g(R)\varphi(-1+i+\beta+v_\theta)] \\ Q_i &= (i-1)[1+g(R)\varphi(-2+i+v_\theta)] \end{aligned} \quad (15)$$

در روابط فوق پارامتر نمایی k پارامتر بهینه سازی می باشد و با استفاده از آن می توان پارامتر کمانش (λ) را حداقل نمود.

حداقل نمودن $J(W)$ مستلزم آن است که :

$$\frac{\partial J(W)}{\partial c_i} = 0 \quad i=1,2,3,\dots,m \quad (16)$$

و یا

$$\frac{a^2}{\pi D_0} \frac{\partial J(W)}{\partial c_i} = 0 \quad (17)$$

با جایگزین کردن رابطه (۷) و (۱۱) در رابطه (۱۸) دستگامی از معادلات بر حسب c_i تشکیل خواهد شد که برای جواب غیر صفر داشتن آن باید دترمینان ماتریس

$$N_r = -N_0 \left(\frac{r}{a}\right)^{\beta-1}, \quad \beta^2 = \frac{E_\theta}{E_r}, \quad N_0 = ph_1 \quad (5)$$

و h_0 و h_1 به ترتیب ضخامت لبه و مرکز صفحه E_r و E_θ به ترتیب مدول الاستیسیته در جهات r و θ و v_r و v_θ به ترتیب نسبت پواسون^۵ در جهات r و θ می باشند [۱۱].

استفاده از روش ریلی - ریتز مستلزم حداقل شدن $J(w)$ است که برابر است با :

$$\begin{aligned} J(w) &= U_{\max} - T_{\max} \\ &= \pi \int_0^a \left[D(r) \left\{ \left(\frac{d^2 w}{dr^2}\right)^2 + \frac{2v_\theta}{r} \left(\frac{dw}{dr}\right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2}\right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + D_\theta(r) \left(\frac{dw}{rdr}\right)^2 - N_r \left(\frac{dw}{dr}\right)^2 \right] r dr + \frac{1}{2} a k_\phi \int_0^{2\pi} \left(\frac{dw(a)}{dr}\right)^2 d\theta \end{aligned} \quad (6)$$

برای سهولت انجام محاسبات رابطه $J(w)$ بی بعد می شود و بدین منظور $R = \frac{r}{a}$ و $W = W(R)$ در نظر گرفته می شود و رابطه (۶) به صورت زیر بازنویسی می شود :

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{\pi D_0} J(W) &= \int_0^1 \left\{ g(R) \left[\left(\frac{d^2 W}{dR^2}\right)^2 + \frac{2v_\theta}{R} \left(\frac{dW}{dR}\right) \left(\frac{d^2 W}{dR^2}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \beta^2 \left(\frac{dW}{RdR}\right)^2 \right] - \lambda R^{\beta-1} \left(\frac{dW}{dR}\right)^2 \right\} R dR + \varphi \left(\frac{dW(1)}{dR}\right)^2 \end{aligned} \quad (7)$$

که در آن λ پارامتر بی بعد کمانش (ثابت کمانش) عبارتست از:

$$\lambda = \frac{N_0 a^2}{D_0} \quad (8)$$

و

$$\varphi = \frac{a k_\phi}{D_0} \quad \text{و همچنین:}$$

$$g(R) = (1 + \gamma R)^3 \quad \text{و} \quad D_0 = \frac{E_r h_0^3}{12(1 - \nu_r \nu_\theta)} \quad (9)$$

شرایط مرزی حاکم بر صفحه دایره ای ارتوتروپ با تکیه گاه مقاوم الاستیک در برابر پیچش بصورت زیر است :

$$\begin{cases} w_i(1) = 0 \\ \varphi \frac{dw_i}{dR}(1) = -g(R) \left[\frac{d^2 w_i}{dR^2}(1) + v_\theta \frac{dw_i}{dR}(1) \right] \end{cases} \quad (10)$$

ضرایب صفر گردد.

$$|A - \lambda B| = 0 \quad (18)$$

که در آن $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times m}$ و

$$a_{ij} = \int_0^1 g(R) \left[\left(\frac{d^2 w_i}{dR^2} \right) \left(\frac{d^2 w_j}{dR^2} \right) + 2v_\theta \left(\frac{d^2 w_i}{dR^2} \right) \left(\frac{dw_j}{RdR} \right) + \beta^2 \left(\frac{dw_i}{RdR} \right) \left(\frac{dw_j}{RdR} \right) \right] RdR + \varphi \left(\frac{dw_i(1)}{dR} \right) \left(\frac{dw_j(1)}{dR} \right)$$

$$b_{ij} = \lambda R^{\beta-1} \int_0^1 \left(\frac{dw_i}{dR} \right) \left(\frac{dw_j}{dR} \right) RdR \quad (19)$$

با استفاده از رابطه (۱۹) رابطه ای بر حسب λ و k بدست می آید که با استفاده از آن می توان λ را بر حسب k محاسبه نمود. با حداقل نمودن λ نسبت به k مقدار بار بحرانی کمانش بدست می آید.

نتایج عددی

برای حل مسأله برنامه ای به صورت نمادین^۶ با استفاده از نرم افزار ریاضی Mathematica و برای حالتی

که $n = 4$ در نظر گرفته شود $W(R) = \sum_{i=1}^4 c_i \psi_i(R)$

(نوشته شده است که با اجرای آن می توان ثابتهای کمانش مورد نظر را محاسبه نمود. در تحلیل حاضر $v_\theta = 0.3$ در نظر گرفته شده است. در جدول (۱) نتایج تحلیل کمانش صفحات دایره ای ارتوتروپ با تکیه گاه الاستیک مقاوم در برابر پیچش برای سه مقدار مختلف β (۱، $\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}$) نشان داده شده است. در این جدول اثر پارامترهای β ، γ و φ (که نشان دهنده سختی فنر یا تکیه گاه است) بررسی شده است. چنانچه در این جدول مشاهده می شود با تغییر ضخامت صفحه و یا با تغییر γ مقدار ثابت کمانش (λ) تغییر می نماید. با افزایش مقدار γ از ۰.۳ - تا ۰.۳ یا به عبارت دیگر با افزایش نسبت ضخامت صفحه در لبه خارجی نسبت به ضخامت مرکز آن، مقدار ثابت کمانش و یا مقاومت صفحه در برابر کمانش افزایش می یابد. همچنین در این جدول مشاهده می شود که با افزایش پارامتر β مقدار λ افزایش می یابد. در حالت $\beta = 1$ صفحه ایزوتروپیک است. چنانچه در این جدول مشاهده می شود با استفاده از یک صفحه

ارتوتروپیک بجای صفحه ایزوتروپیک با مشخصات هندسی یکسان، صفحه می تواند بار کمانش بیشتری را تحمل نماید و مقاومت آن در برابر کمانش افزایش یابد. علاوه بر این در این جدول اثر پارامتر φ بر روی λ نشان داده شده است. در این جدول مشاهده می شود که در حالت $\varphi = 0$ ، صفحه رفتار یک صفحه با تکیه گاه ساده را از خود نشان می دهد و می توان آن را حالت تکیه گاه ساده در نظر گرفت و همچنین در حالتی که $\varphi \approx \infty$ ، صفحه رفتار یک صفحه گیردار را از خود نشان می دهد و نتایج آن همانند نتایج صفحه گیردار است. همانطور که در این جدول ملاحظه می شود با افزایش مقدار φ مقدار λ افزایش می یابد و شرایط مرزی صفحه با افزایش مقدار φ از حالت تکیه گاه ساده به حالت تکیه گاه گیردار نزدیک می شود و مقدار مقاومت صفحه در برابر کمانش افزایش می یابد در نتیجه می توان با تغییر تکیه گاه یک صفحه نیز مقاومت آن را در برابر کمانش افزایش داد. نتایج جدول (۱) در منحنی شکل‌های (۲)، (۳) و (۴) نشان داده شده است و با توجه به این شکلها کاملاً مشهود است که با افزایش β ، φ و γ مقاومت صفحه در برابر کمانش افزایش می یابد.

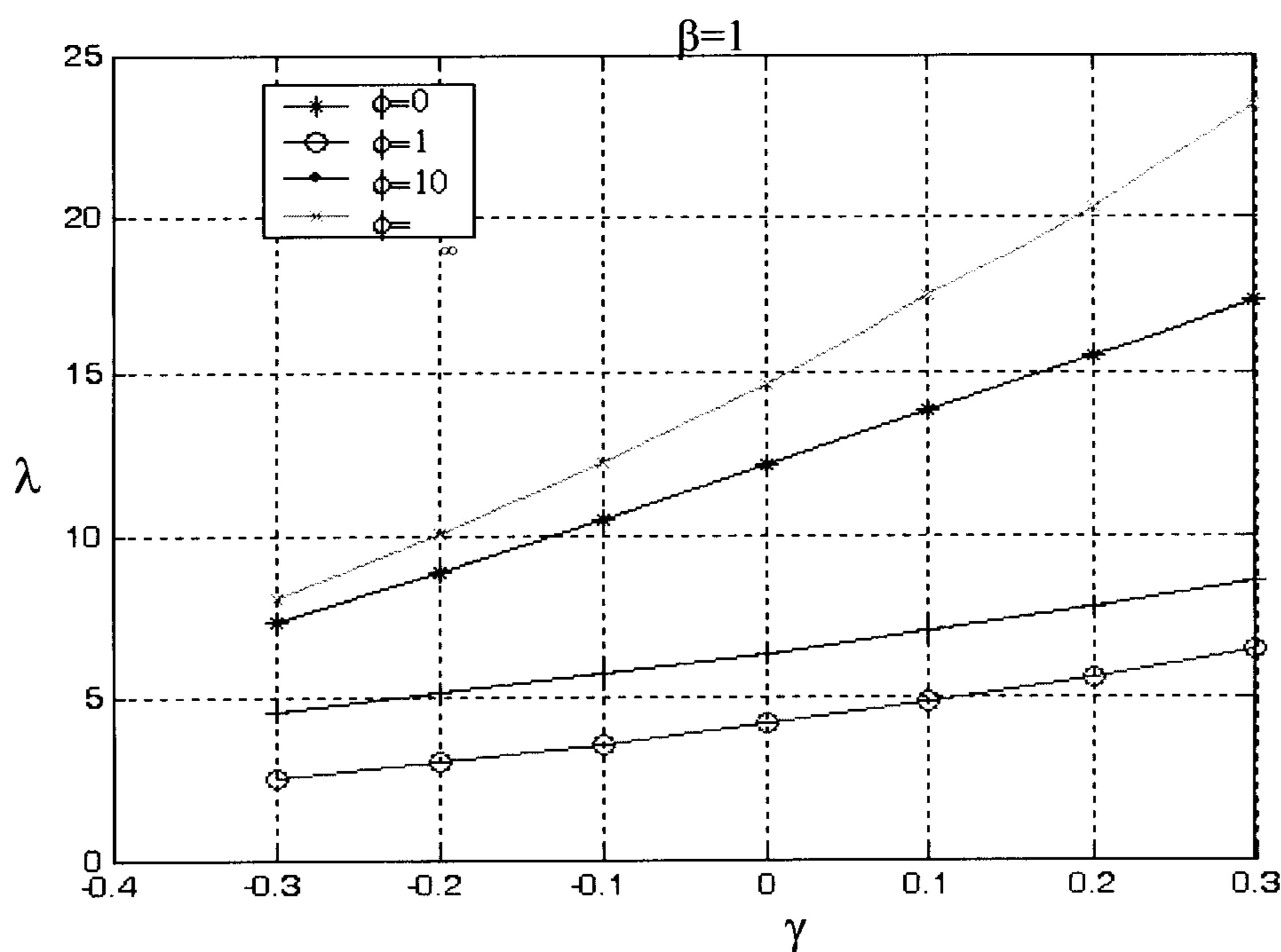
در جدول (۲) نتایج ثابت کمانش صفحات دایره ای ایزوتروپ با ضخامت متغیر خطی حاصل از مطالعه حاضر به همراه نتایج مرجع [۷] که با استفاده از روش ریلی - ریتز بدست آمده، نشان داده شده است. چنانچه در این جدول مشاهده می شود توافق خیلی خوبی بین نتایج دو روش برقرار است. در جدول (۳) نیز نتایج ثابت کمانش صفحات دایره ای ارتوتروپ با ضخامت ثابت حاصل از این مقاله به همراه نتایج مشابه موجود در مرجع [۸] که با استفاده از روش المان محدود بدست آمده، نشان داده شده است. چنانچه در این جدول نیز مشاهده می شود اختلاف جزئی بین نتایج دو روش برقرار است.

نتیجه گیری

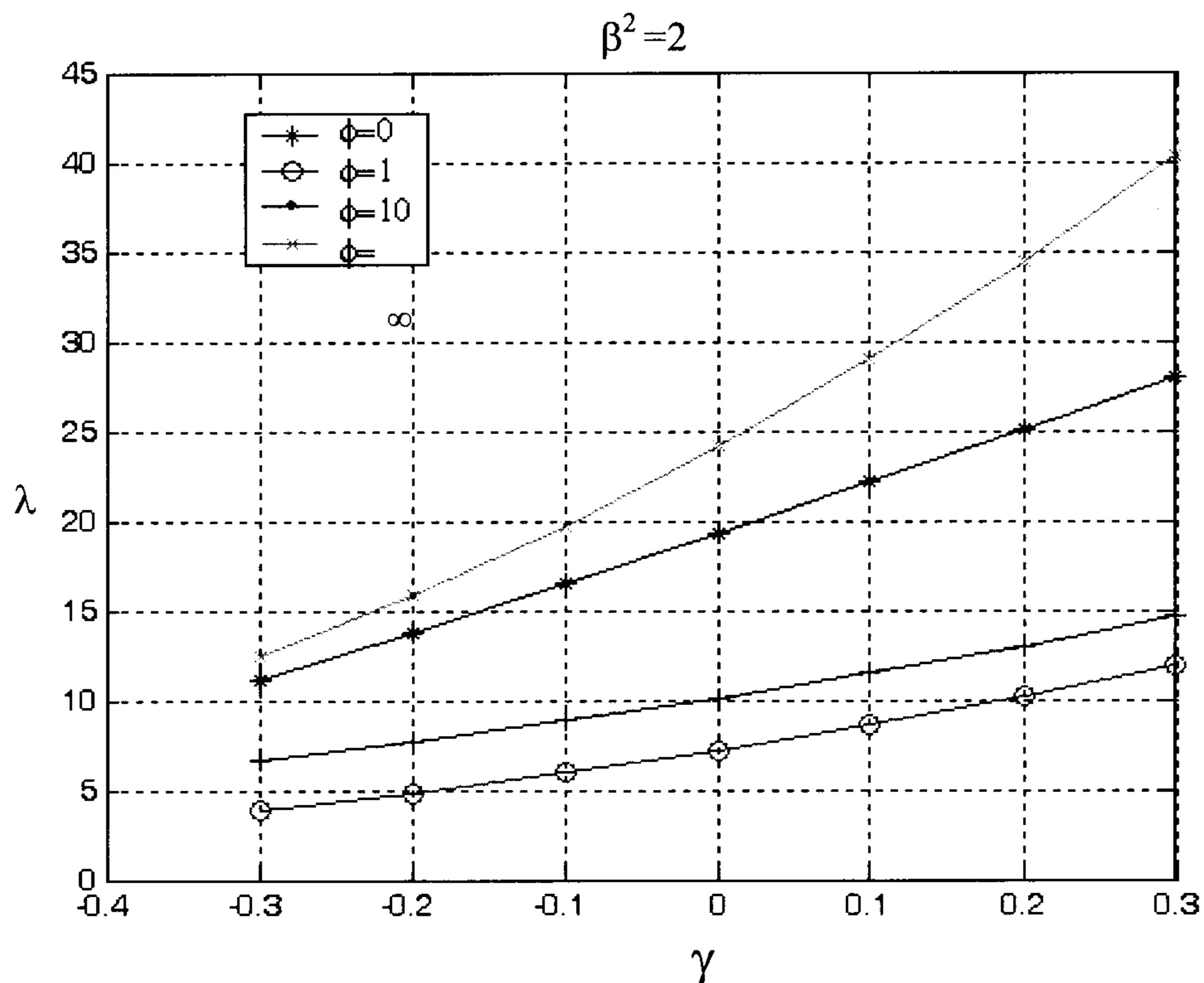
در این مقاله کمانش صفحات دایره ای ارتوتروپ با تکیه گاه الاستیک مقاوم در برابر پیچش و با ضخامت متغیر تحت تأثیر فشار یکنواخت مورد تحلیل واقع شده است.

جدول ۱: ثابت کمانش صفحات دایره ای ارتوتروپ با تکیه گاه مقاوم الاستیک در برابر پیچش و با ضخامت متغیر خطی.

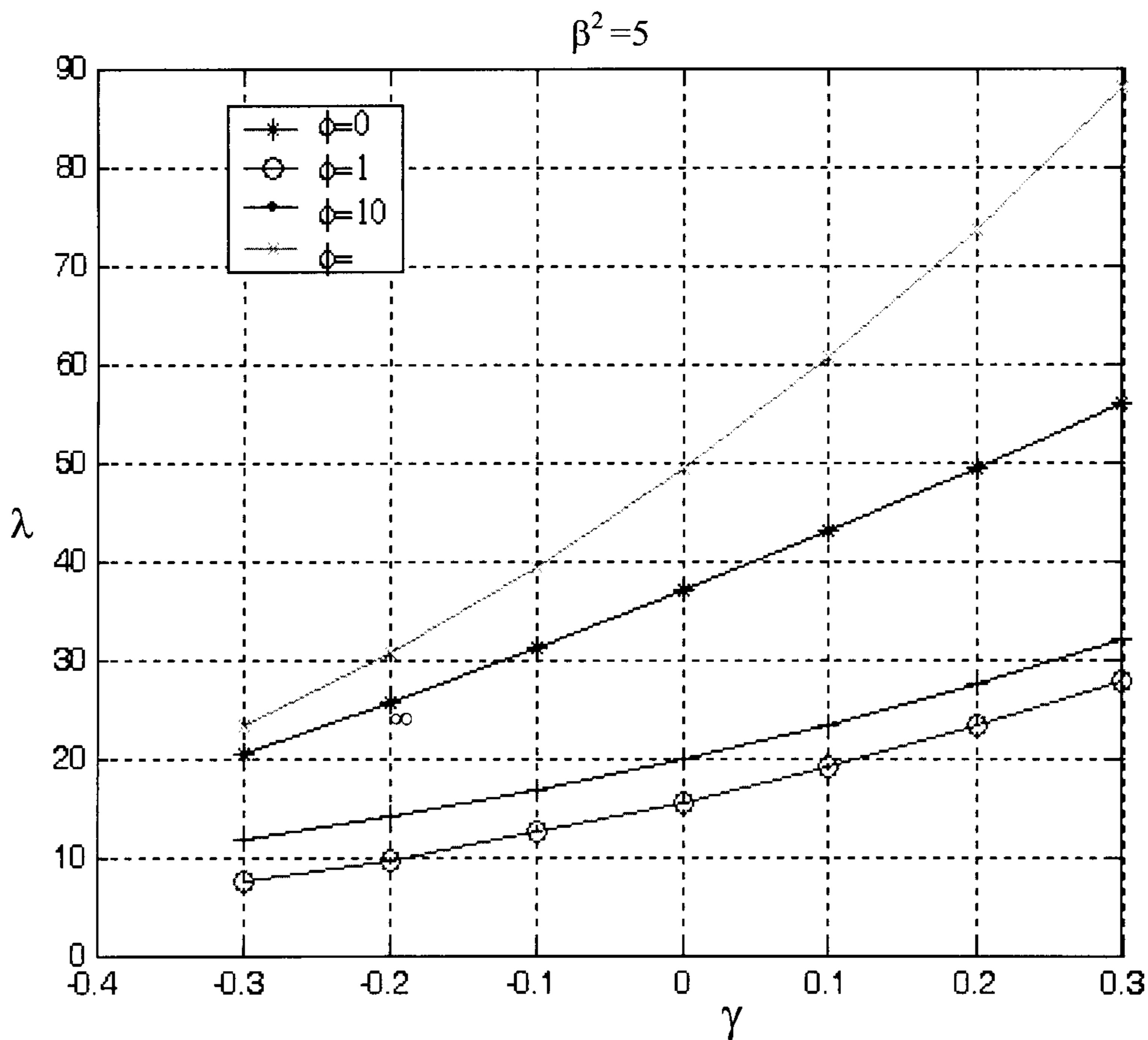
β^2	γ	ϕ			
		0	1	10	∞
1	-0.3	2.50378	4.56161	7.36565	8.05452
	-0.2	3.01382	5.13358	8.91264	10.035
	-0.1	3.57723	5.72539	10.5223	12.2426
	0	4.19779	6.35323	12.1725	14.682
	0.1	4.87917	7.02889	13.8445	17.3579
	0.2	5.62497	7.76129	15.5241	20.2763
	0.3	6.43821	8.55614	17.1969	23.4307
2	-0.3	3.88891	6.65809	11.1512	12.3879
	-0.2	4.85504	7.69472	13.7349	15.8021
	-0.1	5.9552	8.82284	16.4512	19.6953
	0	7.19876	10.0687	19.2599	24.083
	0.1	8.59501	11.4524	22.1281	28.972
	0.2	10.1533	12.9894	25.0347	34.3732
	0.3	11.8829	14.6929	27.9714	40.3045
5	-0.3	7.45063	11.6416	20.401	23.3354
	-0.2	9.7264	13.9994	25.6552	30.7096
	-0.1	12.4054	16.7052	31.2354	39.3376
	0	15.5209	19.816	37.064	49.3054
	0.1	19.1065	23.3798	43.1	60.7138
	0.2	23.1954	27.4381	49.3345	73.64
	0.3	27.8205	32.0283	55.7914	88.1577



شکل ۲: منحنی تغییرات ثابت کمانش صفحات دایره ای ارتوتروپ با تکیه گاه مقاوم الاستیک در برابر پیچش و با ضخامت متغیر خطی.



شکل ۳: منحنی تغییرات ثابت کمانش صفحات دایره ای ارتوتروپ با تکیه گاه مقاوم الاستیک در برابر پیچش و با ضخامت متغیر خطی.



شکل ۴: منحنی تغییرات ثابت کمانش صفحات دایره ای ارتوتروپ با تکیه گاه مقاوم الاستیک در برابر پیچش و با ضخامت متغیر خطی.

جدول ۲: مقایسه بین نتایج مطالعه حاضر و مرجع [۷] برای ثابت کمانش صفحات دایره ای ارتوتروپ با تکیه گاه مقاوم الاستیک در برابر پیچش با ضخامت متغیر (I: نتایج مطالعه حاضر و II: نتایج موجود در مرجع [۷]).

ϕ		γ						
		-0.3	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3
0	I	2.50378	3.01382	3.57723	4.19779	4.87917	5.62497	6.43821
	II	2.504	3.104	3.577	4.198	4.879	5.625	6.438
1	I	4.56161	5.13358	5.72539	6.35323	7.02889	7.76129	8.55614
	II	4.561	5.133	5.725	6.353	7.029	7.761	8.556
10	I	7.36565	8.91264	10.5223	12.1725	13.8445	15.5241	17.1969
	II	7.365	8.912	10.522	12.173	13.844	15.522	17.196
∞	I	8.05452	10.035	12.2426	14.682	17.3579	20.2763	23.4307
	II	8.054	10.035	12.243	14.682	17.357	20.272	23.432

جدول ۳: مقایسه بین نتایج مطالعه حاضر و مرجع [۸] برای ثابت کمانش صفحات دایره ای ارتوتروپ با تکیه گاه مقاوم الاستیک در برابر پیچش با ضخامت ثابت (I: نتایج مطالعه حاضر و II: نتایج موجود در مرجع [۸]).

β^2		ϕ				
		0	1	10	100	∞
1	I	4.198	6.3532	12.1725	14.3922	14.682
	II	4.1978	6.3533	12.1728	14.3928	14.6826
1.4	I	5.546	7.897	15.1346	18.1429	18.542
	II	5.765	8.1448	15.1669	18.1423	18.5409
1.8	I	6.9145	9.6583	17.9121	21.7235	22.236
	II	7.3468	9.9082	17.9923	21.7229	22.2345

۲- با تغییر ضخامت صفحات (γ) ، ثابت کمانش آنها تغییر می نماید و این تغییر در هر دو جهت افزایش و کاهش می باشد. در نتیجه با استفاده از صفحات ضخامت متغیر مناسب (ضخامت لبه خارجی صفحه از ضخامت مرکز صفحه بیشتر باشد یا ($\gamma > 0$)) می توان مقاوت صفحات را در برابر کمانش افزایش داد

۳- با تغییر تکیه گاه صفحات از تکیه گاه ساده به تکیه گاه گیردار و یا با سخت تر کردن تکیه گاه صفحات نیز، ثابت کمانش افزایش می یابد.

۴- با توجه به تعریف ثابت کمانش ($\lambda = \frac{N_0 a^2}{D_0}$)

مشاهده می شود در صفحات با ضخامت یکسان با افزایش مقدار شعاع خارجی a ، مقدار بار بحرانی کمانش (N_0) کاهش می یابد. همچنین با افزایش ضخامت در صفحات شعاع ثابت بار بحرانی کمانش افزایش می یابد.

ضخامت صفحات طبق رابطه $h(r) = h_0 (1 + \gamma \frac{r}{a})$ تغییر می کند. حل مسأله با استفاده از روش ریلی - ریتز بهینه شده انجام شده است که در آن از توابع چند جمله ای که بر اساس تغییر شکل استاتیک صفحات دایره ای ارتوتروپ می باشند، استفاده شده است. همچنین در این روش از یک پارامتر نمایی استفاده می شود که ثابت کمانش نسبت به این پارامتر حداقل می گردد و کمترین ثابت بحرانی کمانش بدست می آید. با توجه به نتایج نشان داده شده در جداول (۱) ، (۲) و (۳) نتایج زیر حاصل می شود:

۱- با افزایش مقدار β مقدار ثابت کمانش (λ) افزایش می یابد. با توجه به این نکته می توان با استفاده از صفحات ارتوتروپیک مقاوم آنها را در برابر کمانش افزایش داد.

مراجع

- 1 - Swamidas, A. S. and Vincent, X. Kunukkasseril. (1973). "Buckling of orthotropic circular plates." *AIAA Journal*, Vol. 11, No. 12, PP.1633-1636.
- 2 - Wang, C. M., Hong, G. M. and Tan, T. J. (1995). "Elastic buckling of tapered circular plates." *Computers and Structures*, Vol. 55, PP.1055-1061.

- 3 - Woinowski-Krieger, (1958). "Buckling stability of circular plates with circular cylindrical allotropy." *Ingenieur- Archiv*, Vol. 26, PP. 129 -131.
- 4 - Mossakowski, J. (1960). "Buckling of circular plates with cylindrical orthotropy." *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, Vol. 12, PP.583-59.
- 5 - Pandalai, K. and Patel, S. (1965). "Buckling of orthotropic circular plates." *Journal of the Aeronautical Society*, Vol. 69, PP.279-280.
- 6 - Wang, C. M., Hong, G. M. and Tan, T. J. (1995). "Buckling of tapered circular plates." *Computers & Structures*, Vol. 55, PP.1055-1061.
- 7 - Gutierrez, R. H., Romanelli, E. and Laura, P. A. A (1996). "Vibration and elastic stability of thin circular plate with variable profile." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 195, PP.391-399.
- 8 – Venkateswara, Rao G. and Kanaka, Raju K. (1986). "A study of various effects on the stability of circular plates." *Computers & Structures*, Vol. 24 , No. 1, PP.39-45.
- 9 – Bhushan, B., Singh, G. and Venkateswara, Rao G. (1996). "Asymmetric buckling of layered orthotropic circular and annular plates of varying thickness using a computationally economic semianalytical finite element approach." *Computers & Structures*, Vol. 59, No.1, PP.21-33.
- 10 – Bert, C. W. (1987). "Application of a version of the Raleigh technique to problems of bars, beams, columns membranes and plates." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 119, PP. 317-326.
- 11- Lekhnitski, S. G. (1968). *Anisotropic Plates*, 2nd Ed., Gordon and Breach , New York.

واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1 – Rayleigh_Ritz

2 – Lommel

3 – Shooting Method

4 – Optimized Rayleigh-Ritz

5 – Poisson's Ratio