

حل تحلیلی معادله حرکت جرم، فنر غیر خطی و دمپر با در نظر گرفتن اثر نیروی باد تحت بار دینامیکی

بهمن مهری

استاد دانشکده ریاضی - دانشگاه صنعتی شریف

علی مقداری

استاد دانشکده مهندسی مکانیک - دانشگاه صنعتی شریف

محمد رضا اشراقی

دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شریف

(تاریخ دریافت ۸۲/۳/۲۴، تاریخ تصویب ۸۳/۷/۲۵)

[E-mail:eshraghi@mehr.sharif.edu](mailto:eshraghi@mehr.sharif.edu)

چکیده

در این مقاله سعی شده است با استفاده از تابع گرین و تابع تبدیل برای معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم جرم، فنر غیر خطی و دمپر با در نظر گرفتن اثرات نیروی باد یک حل تحلیلی ارائه گردد. این معادله در مدلسازی انواع سازه‌های فضایی، بال هواپیما و تمامی سازه‌هایی که در ارتفاع بالا به کار می‌روند و بهتر است که فوندانسیون آنها به صورت فنر غیر خطی و دمپر مدل شود، کاربرد بسیار زیادی دارد، بطوری که جواب این معادله بیان کننده رفتار مکانیکی سیستم واقعی می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: تابع گرین، تابع تبدیل، سیستم‌های غیر خطی، نقطه ثابت باناخ، تبدیل انقباضی

مقدمه

عبارات غیر خطی روش حل تحلیلی تابع گرین یکی از روشهای بسیار کارآمد می باشد.

روش به دست آوردن معادله و حل آن

معادله حاکم بر سیستم جرم، فنر غیر خطی و دمپر با در نظر گرفتن اثر نیروی باد کاربردهای بسیار زیادی در مدلسازیهای واقعی که در آنها سرعت بسیار بالا بوده و نمی‌توان از اثرات نیروی باد صرف نظر نمود بوجود می آیند مانند مدلسازی بال هواپیما و یا دیگر قسمت‌های خارجی سازه‌های هواپیما و سازه‌های فضایی در علوم هوافضا که اثرات نیروی باد بسیار زیاد بوده و نمی‌توان از آن صرف نظر نمود. برای مدلسازی واقعی تکیه گاه می‌بایستی آن را بصورت یک فنر غیر خطی و دمپر در نظر گرفت. در ضمن معادلات حرکت برجهای بلند در مهندسی عمران که اثرات باد بسیار زیاد است را نیز می‌توان شبیه یک جرم، فنر غیر خطی و دمپر مدلسازی نمود. در شرایط واقعی

پیشرفت صنایع در علوم مختلف پیش بینی رفتار انواع سیستم‌ها مخصوصاً در شرایط دینامیکی و بارگذاری متناوب از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. با توجه به اینکه در مدلسازی برای به دست آوردن معادله‌ای ریاضی جهت نشان دادن رفتار یک سیستم واقعی ممکن است چندین فرض ساده شونده انجام گردد لذا بهتر است معادله ریاضی حاکم بر سیستم را جهت نزدیک شدن جوابهایش به رفتار واقعی سیستم به روشهای دقیق حل گردد. در حالت ایده‌آل نیز جواب معادلات به دست آمده با رفتار واقعی سیستم تا حدی متفاوت است زیرا برای به دست آوردن هر معادله‌ای یک سری فرضیات ساده شونده انجام شده است. در ضمن باید دقت داشت تا جایی که ممکن است حل معادلات به دست آمده دقیق باشد و یا به بیان دیگر تا جایی که ممکن است حل تحلیلی معادله را به دست آورد، زیرا روشهای عددی بطور ذاتی دارای خطای قابل ملاحظه‌ای می‌باشند و با این کار از انباشته شدن خطاها جلوگیری می‌شود. در معادلات دیفرانسیل با ضرایب و

$$\ddot{y} + \frac{K_1}{M}y + \frac{K_2}{M}y^3 + \frac{K_3}{M}\dot{y} + \frac{K_4}{M}\dot{y}^2 = \frac{K_5}{M}\sin(\omega t) \quad (3)$$

برای راحتی در انجام محاسبات، تغییرات پارامتری به صورت زیر در معادله انجام خواهد شد.

$$\frac{K_1}{M} = \alpha, \quad \frac{K_2}{M} = \beta, \quad \frac{K_3}{M} = \gamma$$

$$\frac{K_4}{M} = \delta, \quad \frac{K_5}{M} = \lambda$$

که پارامترهای $\lambda, \delta, \gamma, \beta, \alpha$ به ترتیب K_1 تا K_5 نسبت به واحد جرم هستند. نهایتاً معادله حرکت جرم و فنر غیر خطی با در نظر گرفتن اثرات نیروی باد تحت بار هارمونیک به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\ddot{y} + \alpha y + \beta y^3 + \gamma \dot{y} + \delta \dot{y}^2 = \lambda \sin(\omega t) \quad (4)$$

بدیهی است که برای حل معادله فوق چون از مرتبه دو می‌باشد نیاز به دو شرط مرزی است با توجه به مدلسازیهای واقعی شرایط مرزی معادله فوق بدین صورت در نظر گرفته شده که مبداء زمان و مکان را بر روی هم منطبق باشند و سیستم در لحظه صفر از نقطه صفر شروع به حرکت می‌کند ($y(0)=0$) و شرط دوم را بهتر است به گونه‌ای در نظر گرفت که از تشدید جلوگیری شود. برای جلوگیری از تشدید باید ارتعاشات طبیعی حذف گردند یعنی هر وقت که نیرو صفر شد تغییر مکان نیز صفر گردد، زیرا ارتعاشات طبیعی بدون داشتن نیروی خارجی به وجود می‌آیند. هرگاه نیروی خارجی صفر می‌شود و در همان لحظه نیز جابجایی صفر شود یعنی در صورت عدم وجود نیروی خارجی جابجایی نیز وجود نداشته باشد می‌توان نتیجه گرفت ارتعاشات طبیعی در چنین سیستمی صفر شده و نتیجتاً از تشدید جلوگیری شده است. پس شرط دوم را به صورت ($y(2\pi/\omega)=0$) در نظر گرفته می‌شود. در نهایت باید معادله (۴) را به صورت زیر در نظر گرفت و حل نمود.

$$\ddot{y} = \lambda \sin(\omega \times t) - \alpha y - \beta y^3 - \gamma \dot{y} - \delta \dot{y}^2 \quad (5)$$

حتی اگر تکیه‌گاه کاملاً الاستیک فرض شود و اثر دمپینگ ناچیز باشد، ویسکوزیته هوا یا هر محیط خارجی می‌تواند اثر دمپینگ مؤثر بر سیستم واقعی به وجود آورد. نهایتاً معادله ای شبیه معادله زیر حاکم بر سیستم خواهد بود. با توجه به کاربردهای متفاوت در مدلسازیهای مختلف در علوم مهندسی، ضرایب معادله بصورت پارامتری در نظر گرفته شده است زیرا بتوان از حل این معادله در تمام مدلسازیهایی که معادله حاکم بصورت زیر می‌باشد استفاده نمود، لازم به ذکر است که فنر غیر خطی ممکن است به دو صورت سخت شونده و نرم شونده باشد که این موضوع به علامت ضریب y^3 در رابطه فنر غیر خطی بستگی دارد. اگر ضریب y^3 در رابطه فنر غیر خطی مثبت باشد فنر سخت شونده و اگر منفی باشد فنر نرم شونده می‌باشد در مقاله حاضر هیچ فرضی در مورد سخت شوندگی یا نرم شوندگی فنر انجام نشده است، در مورد لزوم برای مدلسازی مختلف می‌توان با جایگزین نمودن مناسب پارامترها (از نظر علامت) هر یک از حالت‌های ذکر شده را داشت. نیروی فنر غیرخطی در حالت کلی بصورت:

$$F(y) = K_1 y + K_2 y^3$$

در نظر گرفته می‌شود. اگر $K_2 > 0$ فنر سخت شونده و اگر $K_2 < 0$ فنر نرم شونده است.

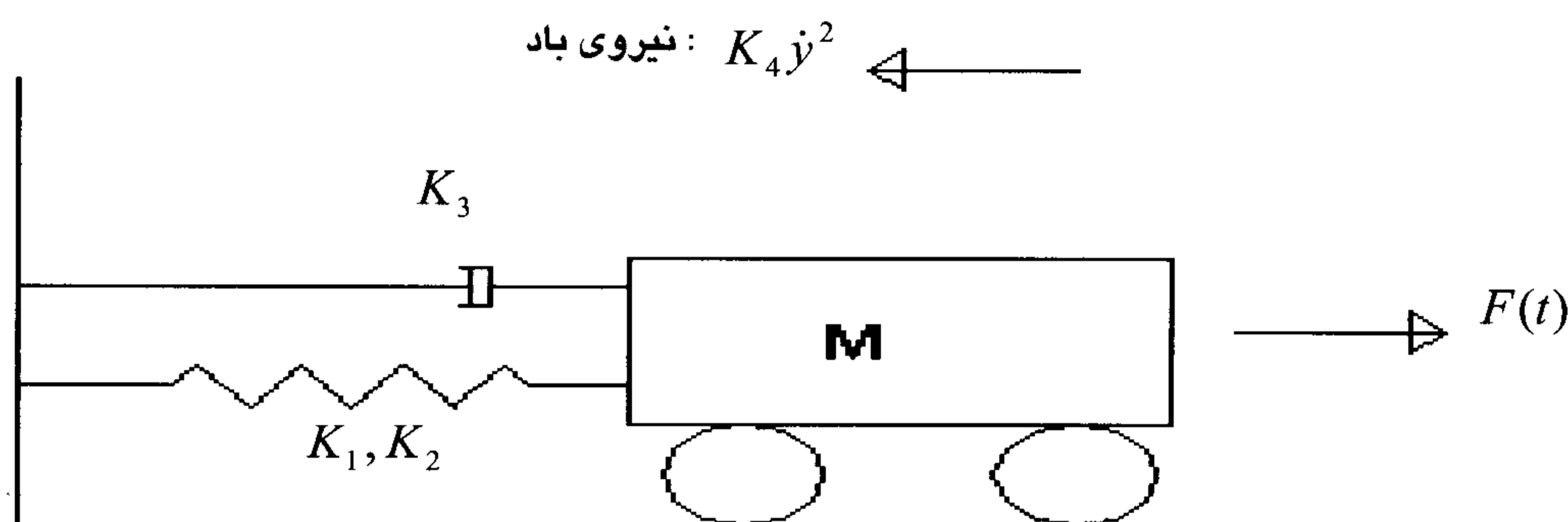
معادله جرم، فنر غیر خطی و دمپر با توجه به در نظر گرفتن اثرات نیروی باد تحت بار خارجی $F(t)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$M\ddot{y} + K_1 y + K_2 y^3 + K_3 \dot{y} + K_4 \dot{y}^2 = F(t) \quad (1)$$

در علوم مختلف مهندسی جهت بررسی پاسخ رفتار مکانیکی یک سیستم آنرا تحت بارهای استاندارد قرار می‌دهند که از این جمله بار هارمونیک می‌باشد. در معادله فوق $F(t)$ را به صورت $K_5 \sin(\omega t)$ در نظر گرفته می‌شود که K_5 دامنه بارگذاری و ω فرکانس بارگذاری است. در این صورت معادله (۱) را می‌توان به معادله (۲) تبدیل نمود.

$$M\ddot{y} + K_1 y + K_2 y^3 + K_3 \dot{y} + K_4 \dot{y}^2 = K_5 \sin(\omega t) \quad (2)$$

با تقسیم طرفین بر جرم M می‌توان معادله (۲) را به صورت زیر بازنویسی نمود.



برای حل تحلیلی معادله، از تابع گرین استفاده می شود بدین صورت که $\ddot{G} = 0$ در نظر گرفته می شود. زیرا تابع گرین باید در قسمت خطی معادله دیفرانسیل مطلوب صدق نماید. در نتیجه تابع گرین باید بصورت خطی زیر در نظر گرفته شود:

$$G(t) = \begin{cases} at + b & 0 \leq t \leq \xi \leq \frac{2\pi}{\omega} \\ ct + d & 0 \leq \xi \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega} \end{cases} \quad (6)$$

برای به دست آوردن ضرایب تابع گرین باید شرایط زیر اعمال گردد. تابع گرین باید شرایط مرزی را ارضا نماید و در $t = \xi$ پیوسته باشد و مشتق آن در $t = \xi$ دارای ناپیوستگی و پرش واحد (یک) باشد.

$$\begin{aligned} G(0) = 0 &\rightarrow a \times 0 + b = 0 \\ G\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = 0 &\rightarrow c \times \frac{2\pi}{\omega} + d = 0 \\ a \times \xi + b &= c \times \xi + d \\ G'(\xi^+) - G'(\xi^-) &= 1 \rightarrow c - a = 1 \end{aligned}$$

با حل چهار معادله، چهار مجهول فوق نتایج زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} a &= \frac{\xi\omega}{2\pi} - 1 & b &= 0 \\ c &= \frac{\xi\omega}{2\pi} & d &= -\xi \end{aligned}$$

در نتیجه تابع گرین بصورت زیر به دست می آید:

$$G(t, \xi) = \begin{cases} \left(\frac{\xi\omega}{2\pi} - 1\right)t & 0 \leq t \leq \xi \leq \frac{2\pi}{\omega} \\ \left(\frac{t\omega}{2\pi} - 1\right)\xi & 0 \leq \xi \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega} \end{cases} \quad (7)$$

حال با داشتن تابع گرین و معادله (5) می توان تابع تبدیلی به صورت زیر در نظر گرفت:

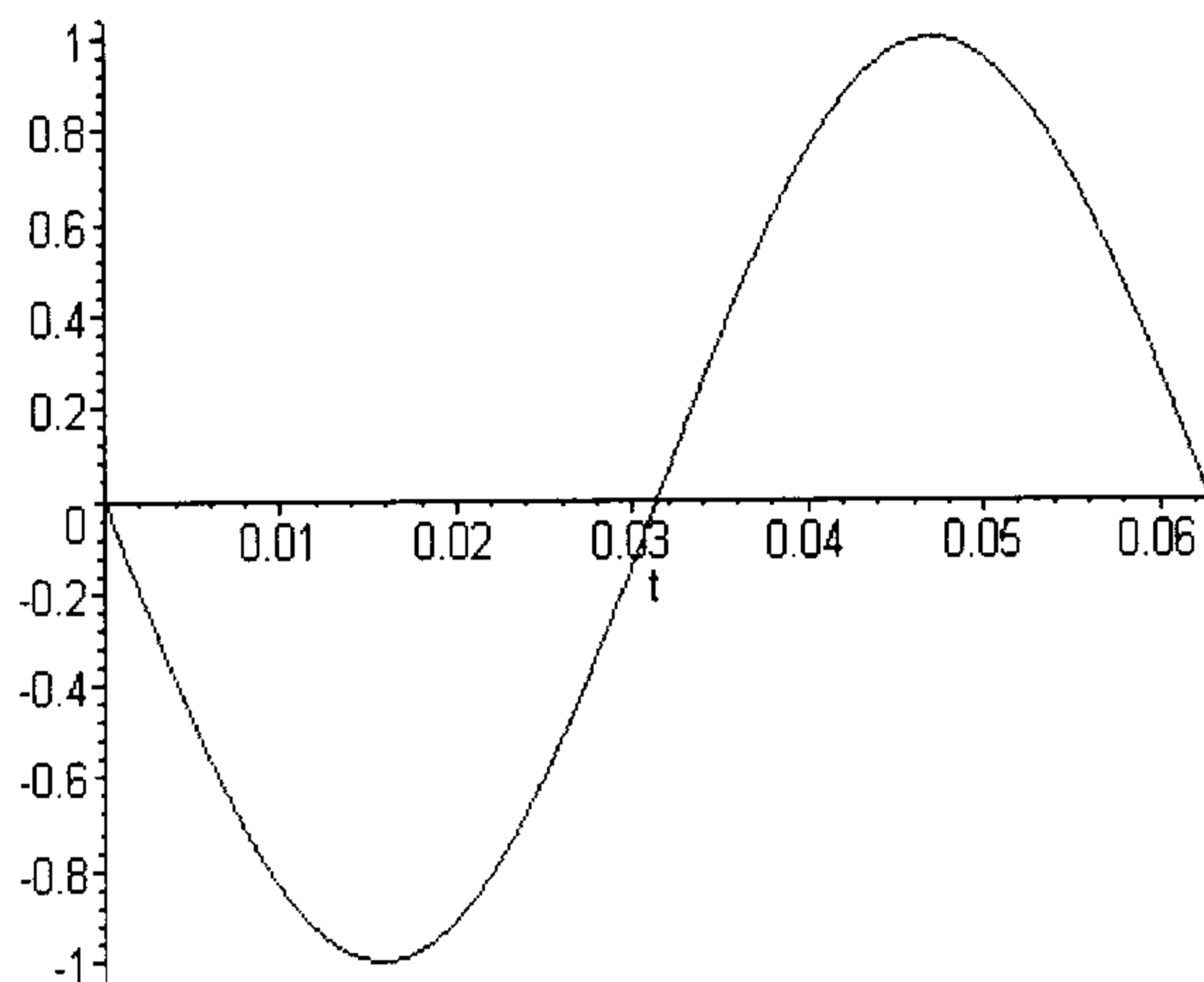
$$T(y) = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} G(t, \xi) \times \left(\lambda \sin(\omega * \xi) - \alpha y(\xi) - \beta y^3(\xi) - \gamma \dot{y}(\xi) - \delta \dot{y}^2(\xi) \right) \times d\xi \quad (8)$$

استفاده از قضیه نقطه ثابت باناخ وجود جواب اثبات می شود، برای این کار ابتدا باید فضای باناخ و فاصله متریک تعریف گردند. فضای باناخ مجموعه توابع پیوسته در فاصله 0 تا $2\pi/\omega$ در نظر گرفته شده و فاصله متریک نیز به صورت زیر تعریف می گردد.

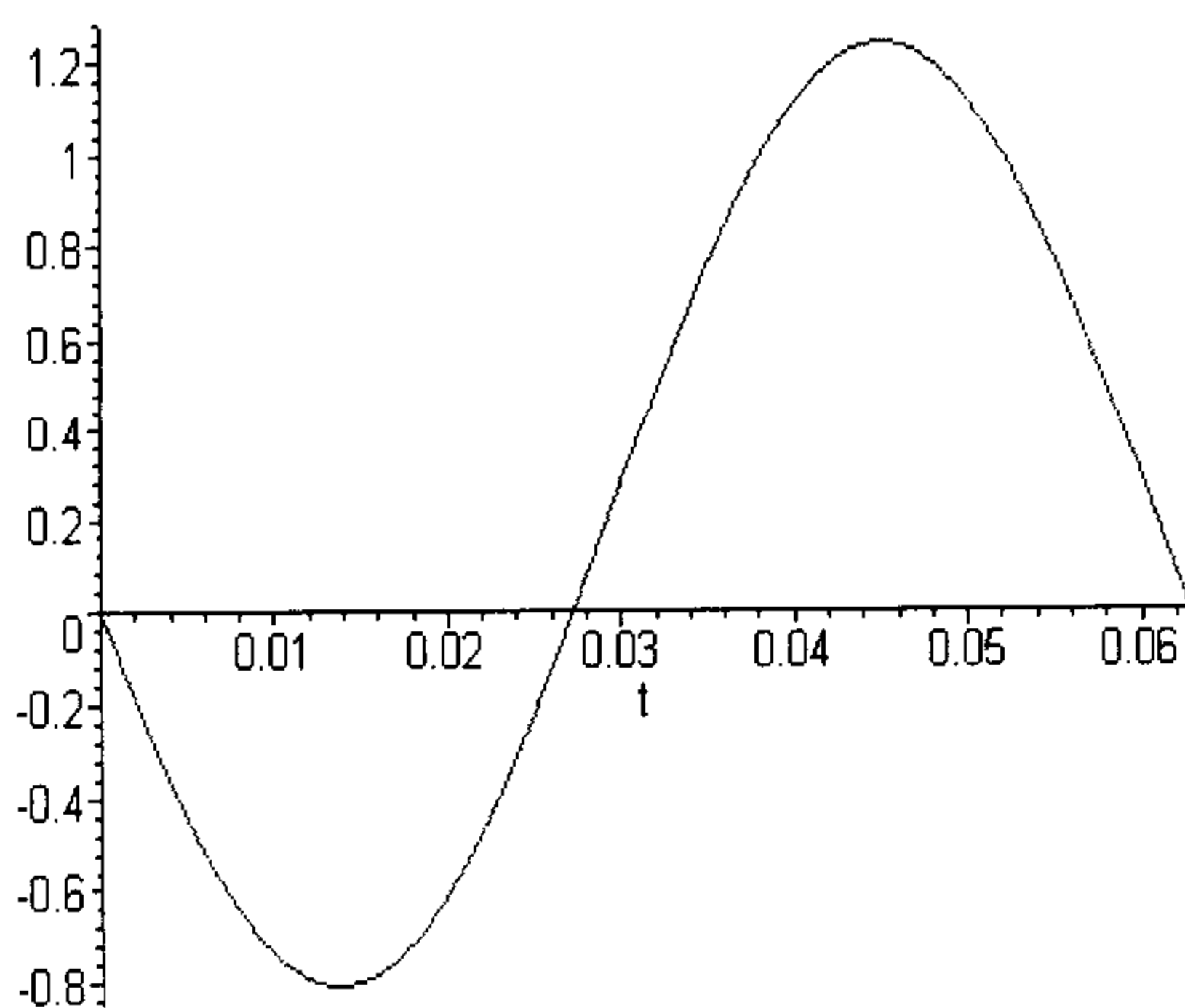
$$\begin{aligned} B &= \left\{ y(t) / y(t) \in C \left[0, \frac{2\pi}{\omega} \right] \right\} \\ d(y_1, y_2) &= \text{Sup} |y_1(t) - y_2(t)| + \text{Sup} |y_1'(t) - y_2'(t)| \end{aligned} \quad (9)$$

برای وجود جواب باید ثابت کرد که فضای باناخ تعریف شده به صورت فوق و فاصله تعریف شده در رابطه (9) همراه با تابع تبدیل (8) یک تبدیل انقباضی است و در نتیجه طبق قضیه نقطه ثابت باناخ یک جواب به صورت $y=T(y)$ وجود خواهد داشت و مسئله اثبات شده خواهد بود. برای انقباضی بودن تابع تبدیل کافی است ثابت شود $0 < a < 1$ که در آن $d(Ty_1, Ty_2) < a \times d(y_1, y_2)$ است.

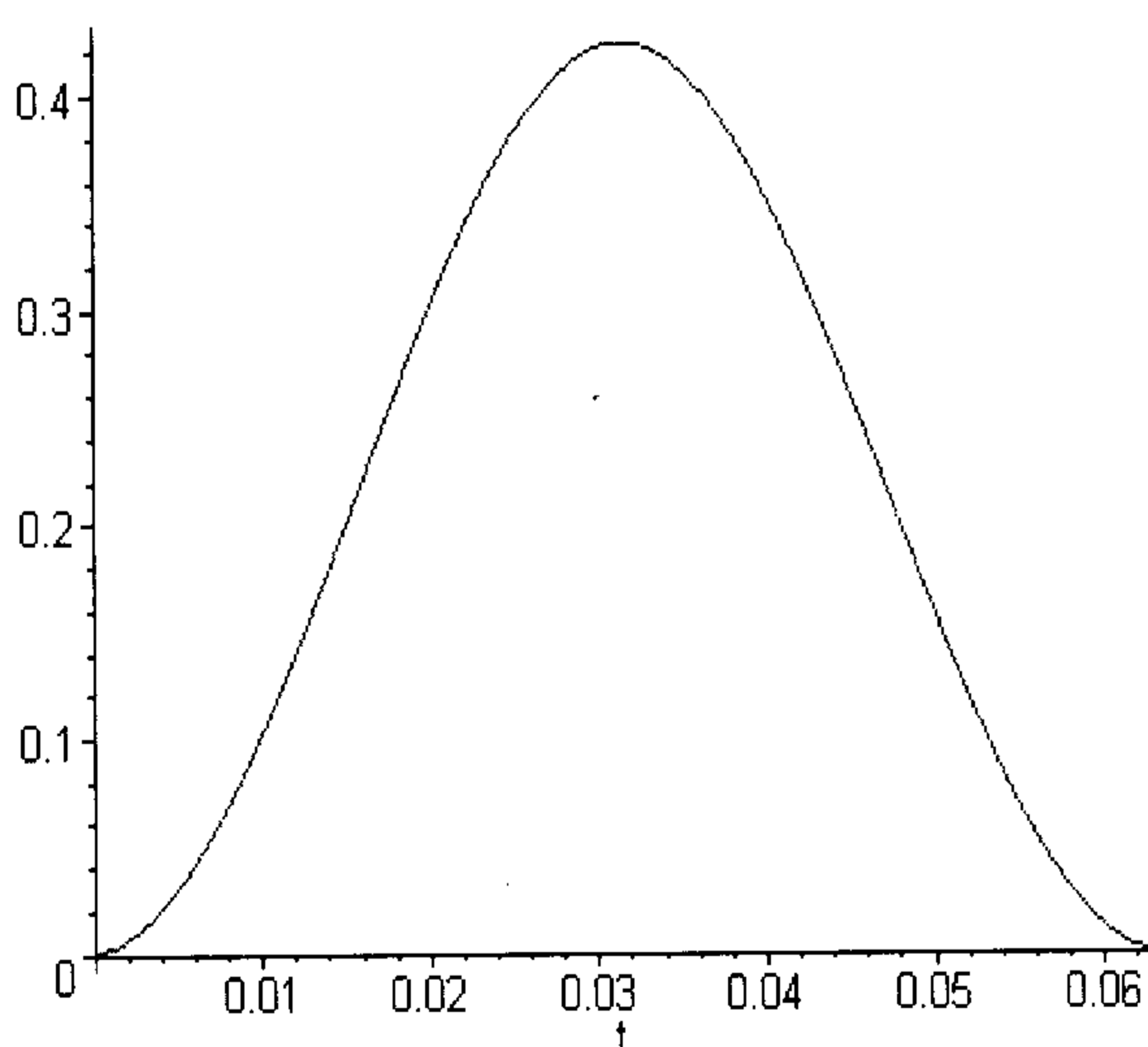
$$\begin{aligned} d(Ty_1, Ty_2) &= \text{Sup} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} |G(t, \xi)| \times \left(\begin{aligned} &\alpha(y_2 - y_1) + \\ &\beta(y_2^3 - y_1^3) + \\ &\gamma(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + \\ &\delta(\dot{y}_2^2 - \dot{y}_1^2) \end{aligned} \right) d\xi \\ d(Ty_1, Ty_2) &< \frac{2\pi}{\omega} \times \left\{ \begin{aligned} &(\alpha + 3M^2\beta) \times \text{Sup} |y_2 - y_1| \\ &+ (\gamma + 2N\delta) \times \text{Sup} |\dot{y}_2 - \dot{y}_1| \end{aligned} \right\} \\ &< a \times [\text{Sup} |y_2 - y_1| + \text{Sup} |\dot{y}_2 - \dot{y}_1|] \end{aligned}$$



شکل ۱: نمایش رفتار y_1 .



شکل ۲: نمایش رفتار y_2 .



شکل ۳: نمایش رفتار $y_2 - y_1$.

$$0 < a < 1 \Rightarrow$$

$$\sqrt{(\alpha + 3M^2\beta)^2 + (\gamma + 2\delta N)^2} < \frac{\omega}{2\pi}$$

M بزرگترین مقدار توابع و N بزرگترین مقدار مشتق توابع در مجموعه فضای باناخ می باشد. در نهایت می توان رابطه زنجیره ای زیر را در نظر گرفت.

$$y_{n+1} = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} G(t, \xi) \times \begin{pmatrix} \lambda \sin(\omega * \xi) - \\ \alpha y_n(\xi) - \beta y_n^3(\xi) \\ - \gamma \dot{y}_n(\xi) - \delta \ddot{y}_n^2(\xi) \end{pmatrix} d\xi \quad (10)$$

به همین ترتیب می توان از رابطه زنجیره ای، جوابهای متعددی به دست آورد. اولین جواب به صورت دلخواه از مجموعه توابع فضای باناخ انتخاب شده و از روی جواب فرض شده اول به کمک رابطه زنجیره ای (۱۰) می توان سایر جوابها را نیز به دست آورد.

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = T(y_0) = -\frac{\delta}{\omega^2} \sin(\omega t)$$

$$y_2 = T(y_1) = \dots$$

$$y_n = T(y_{n-1}) = \dots$$

جهت مقایسه عددی جوابهای به دست آمده، پارامترهای معادله به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$\alpha = 10 \quad , \quad \beta = 1 \quad , \quad \gamma = 20$$

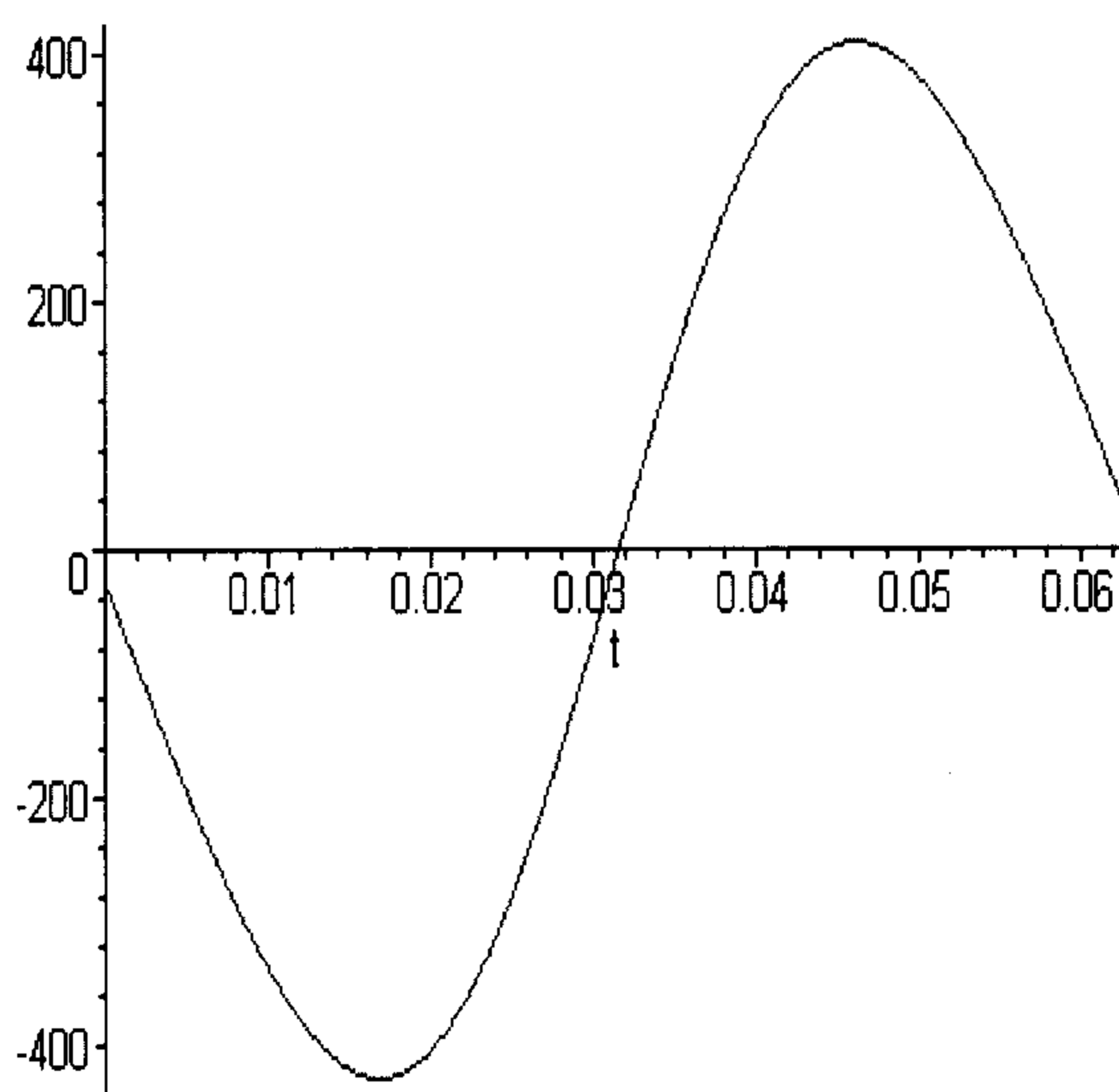
$$\lambda = 10000 \quad , \quad \omega = 100$$

و با استفاده از نرم افزار Maple جوابهای y_1 و y_2 پس از محاسبه، رسم شده اند. شکل های (۱) و (۲) و (۳) به ترتیب نمایش دهنده رفتار y_1 ، y_2 و $y_2 - y_1$ در یک پریود $2\pi/\omega$ می باشد. با تعریف تابع خطا به صورت

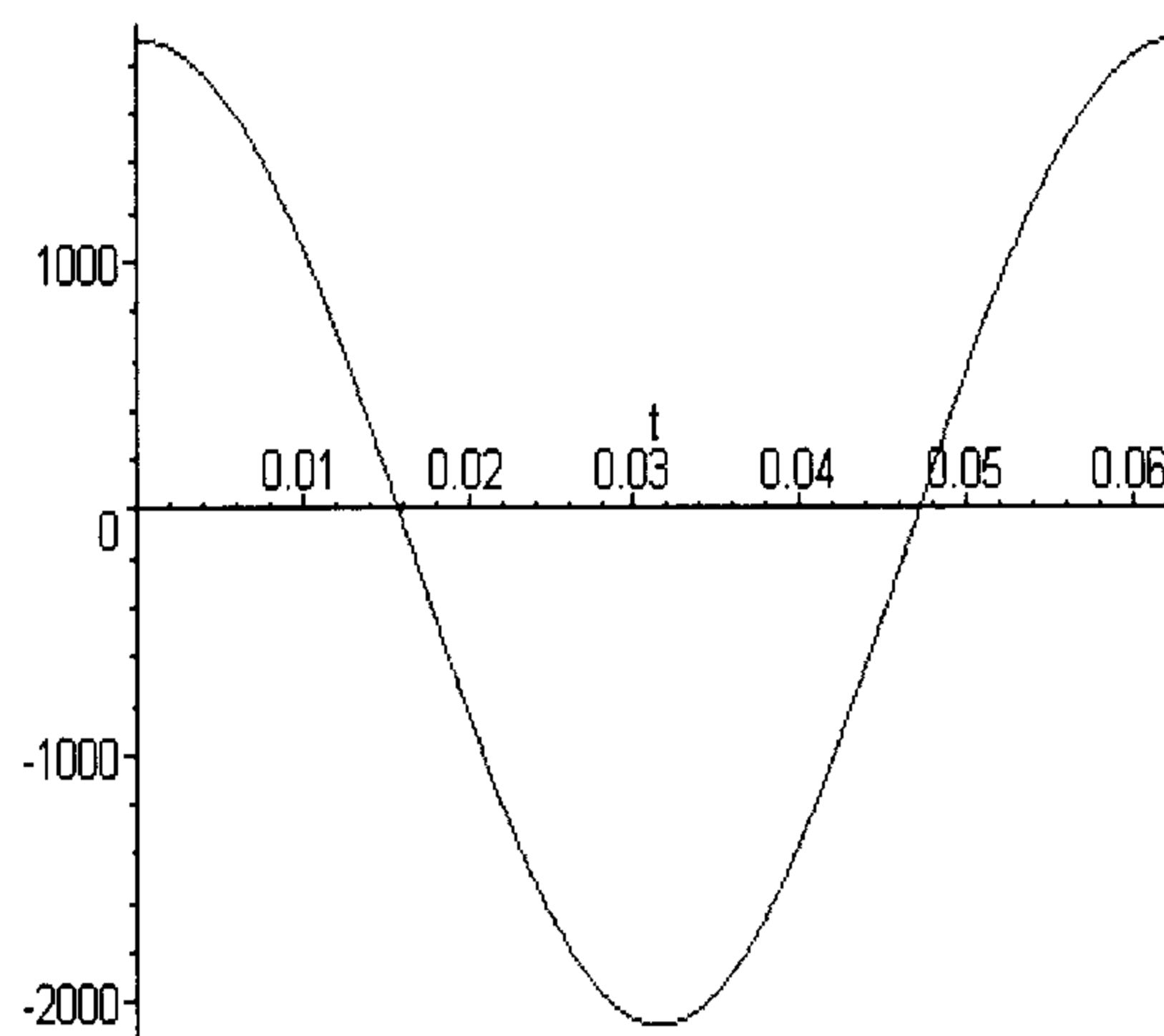
$$e = \lambda \sin(\omega * t) - \ddot{y} - \alpha y - \beta y^3 - \gamma \dot{y} - \delta \ddot{y}^2$$

می توان تابع خطا را بزاء جوابهای y_1 و y_2 محاسبه نمود. رفتار خطای این توابع در بازه پریود $[0, 2\pi/\omega]$ به ترتیب در شکل های (۴) و (۵) مشاهده می شود.

دو تابع یکسان بوده ولی رفتار تابع خطا متفاوت می‌باشد. در ضمن مقدار قدر مطلق تابع خطا به سرعت کم شده و نسبت به حالت قبل به سمت صفر میل می‌نماید. با مقایسه روش فوق با روشهای عددی که غالباً همگرا نمی‌شوند یا به سختی همگرا می‌شوند کارایی این روش را می‌توان ملاحظه نمود.



شکل ۵: تابع خطای جواب y_2 .



شکل ۴: تابع خطای جواب y_1 .

نتیجه گیری

شکل‌های (۱) و (۲) نشان می‌دهند که این روش به سرعت همگرا شده و نیازی به تکرار جوابهای متعدد نمی‌باشد و با توجه به اینکه جواب y_1 فقط دارای ضریب δ بوده ولی تابع y_2 برحسب تمامی ضرایب است. رفتار

مراجع

- 1 - Stoker J. J. (1950). *Nonlinear vibration in mechanical and electrical systems*, Interscience Publisher.
- 2 - Bihari I. (1961). "On periodic solutions of certain second order ordinary differential equation with periodic coefficients." *Acta Math. Acad. Sci., Hungar.* Vol. 12, PP. 11-16.
- 3 - Bihari I. (1985). "Periodic solutions of some second order nonlinear differential equations with periodic coefficients, ordinary and partial differential equations." *Lecture Notes in Math.*, Vo. 1151, Springer, Berlin, PP. 49-59
- 4 - Cronin, J. (1964). *fixed point and topological degree in nonlinear analysis, math survey II*. American Mathematical Society.
- 5 - Laser, A. C. (1968). "On Schauder's fixed point theorem and forced second order nonlinear oscillation." *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 21, PP.421-425.
- 6 - Mehri, B. and Niksirat, M. (1997). "On the existence of periodic oscillation for vector nonlinear second order system." *Proc. Of 28th Annual Iranian Mathematics Conference*.
- 7 - Mehri, B. and Niksirat, M. (2000). "The existence of periodic solution for the nonlinear autonomous ODEs." *Nonlinear Analysis Forum*, Vol. 5, PP.163-171.
- 8 - Lloyd, N. G. (1978). *degree theory*, Cambridge University Press.
- 9 - Mehri, B. and Niksirat, M. (2001). "On the existence of periodic solution for the quasi-linear third order ODE." *J. Math. Anal. App.*, Vol. 261, No. 1, PP. 159-167.

